



BACHELORARBEIT

Herr
Martin Richter

Zufällige Irrfahrten auf Graphen

2012

BACHELORARBEIT

Zufällige Irrfahrten auf Graphen

Autor:

Martin Richter

Studiengang:

Angewandte Mathematik

Seminargruppe:

Ma09

Erstprüfer:

Herr Prof. Dr. Peter Tittmann

Zweitprüfer:

Frau Prof. Dr. Sonja Helbig

Mittweida, Juli 2012

Bibliografische Angaben

Richter, Martin: Zufällige Irrfahrten auf Graphen, 59 Seiten, 10 Abbildungen, Hochschule Mittweida (FH), Fakultät Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik

Bachelorarbeit, 2012

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Satz: \LaTeX

Referat

Wir betrachten eine auf einem zusammenhängenden, endlichen, ungerichteten, schlichten Graphen $G = (V, E)$ stattfindende Irrfahrt. Interessante Kenngrößen dieses stochastischen Prozesses, sind die mittleren Erstankunftszeiten, d.h. wie lang dauert es im Mittel, um von Knoten $x \in V$ zu Knoten $y \in V$ zu gelangen und die Überdeckungszeit des Graphen, diese gibt an, wie lang es im Mittel dauert, um ausgehend von einem beliebigen Knoten $x \in V$, alle Knoten des Graphen zu besuchen. Wir wollen diese Kenngrößen mit Mitteln aus mehreren Teilgebieten der Mathematik analysieren. Dazu zählen die Theorie der markovschen Prozesse, die lineare Algebra, die Graphentheorie und die Theorie der erzeugenden Funktionen. Im Werk von Doyle und Snell "Random walks and electric networks" (siehe [9]) wird die Verbindung zwischen zufälligen Irrfahrten auf Graphen und der Elektrotechnik hergestellt. Weiterführende Ergebnisse sind in der Arbeit von Prasad Tetali "Random Walks and the Effective Resistance of Networks" (siehe [10]) zu finden. Wir werden sehen, dass Kenngrößen zufälliger Irrfahrten durch elektrotechnische Werte ersetzt werden können.

I. Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	iii
Nomenclature	v
Vorwort	vii
1 Vereinbarungen und Fakten	1
1.1 Irrfahrten auf ungerichteten Graphen	1
1.1.1 Kennwerte zufälliger Irrfahrten	1
2 Mittlere Erstankunftszeiten	3
2.1 Ergodische Markov-Ketten	3
2.1.1 Theoreme zu ergodischen Markov-Ketten	3
2.1.2 Die Fundamentalmatrix ergodischer Markov-Ketten	11
2.1.3 Berechnung mittlerer Erstankunftszeiten	14
2.1.3.1 Mittlere Erstrückkehrzeit	15
2.1.3.2 Mittlere Erstankunftszeit	15
2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen	16
2.3 Eigenwerte und Grenzverteilung	19
2.4 Elektrische Netzwerke und Kennwerte zufälliger Irrfahrten	23
2.5 Mittlere Erstankunftszeit und erzeugende Funktionen	27
3 Überdeckungszeit	33
3.1 Vorstellung der Problematik	33
3.2 Überdeckungszeit spezieller Graphen	35
3.2.1 Vollständiger Graph K_n	35
3.2.2 Weg P_n	36
3.2.3 Kreis C_n	37
3.3 Schranken für die Überdeckungszeit	38
3.3.1 Matthews Grenze	38
3.3.2 Eine weitere Grenze*	41
3.4 Eine falsche Annahme*	41
4 Anwendung der Theorie	45
4.1 Simulated Annealing	45
4.1.1 Analyse des Verfahrens	46
4.2 Analyse spezieller Graphen*	49
4.2.1 Vollständiger Graph K_n	49
4.2.2 Der Kreis C_n	50
4.2.3 Der Stern S_n	52
4.2.4 Der Leitergraph L_n	53
4.3 Ausblick	54

II. Abbildungsverzeichnis

2.1.1	Wahrscheinlichkeitsvektoren im \mathbb{R}^2	8
3.1.1	Irrfahrt auf einem speziellen Graphen	33
3.1.2	Fallunterscheidungen	34
3.4.1	Ausschnitt aus [4], Seite 53	42
4.2.1	Der Kreis C_n	51
4.2.2	Reduktion des Kreises C_n	51
4.2.3	Der Stern S_n	52
4.2.4	Reduktion des Sterns S_n	52
4.2.5	Der Leitergraph L_n	53
4.2.6	Reduktion des Leitergraphen L_n	54

III. Nomenclature

$(A)_{ij} = a_{ij}$	i, j 'te Element einer Matrix A
$(A)_j$	j 'te Spalte der Matrix A
$(w)_i$	i 'te Komponente eines Vektors w
0	skalare Null, Nullvektor, Nullmatrix (ist dem Kontext zu entnehmen)
$\{x, y\}$	Kante eines Graphen (sofern keine Menge)
\mathbb{C}^n	Menge aller n -dimensionalen Vektoren mit Werten aus \mathbb{C}
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Menge aller $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{R}
I	Einheitsmatrix
c_{in}	Überdeckungszeit eines Graphen, ausgehend von Knoten $i \in V$
C_{xy}	Leitwert bezüglich der Kante $\{x, y\} \in E$
$\deg(x)$	Knotengrad von $x \in V$
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$..	Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen x_1, x_2, \dots, x_n
$E(X)$	Erwartungswert einer Zufallsgröße X
e_j	j 'ter Einheitsvektor
$G = (V, E)$	Zusammenhängender, endlicher, ungerichteter, schlichter Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E
$G = (V, E, C)$	Elektrisches Netzwerk mit der Knotenmenge V , der Kantenmenge E und der Leitwertfunktion C
ggT	Größter gemeinsamer Teiler
i_{xy}	Stromstärke bezüglich der Kante $\{x, y\} \in E$
k_{ij}	Pendelzeit von Knoten $i \in V$ zu Knoten $j \in V$
m_{ij}	Mittlere Erstankunftszeit von Knoten $i \in V$ zu Knoten $j \in V$
$N(x)$	Nachbarschaft eines Knotens $x \in V$
P	Übergangsmatrix eines markovschen Prozesses
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A
$p(s)$	Periode eines Zustandes
P^T	Transponierte Matrix P
p_{ij}	Übergangswahrscheinlichkeit von Knoten i zu Knoten j
$p_{ij}^{(t)}$	Wahrscheinlichkeit, ausgehend von Knoten i , nach t Schritten im Knoten j zu landen
P_t	Spaltenvektor mit den Komponenten $P_t(j)$
$P_t(j) \ t \geq 0$	Wahrscheinlichkeit, dass sich der Prozess zum Zeitpunkt t in $j \in V$ befindet ($P_t(j) = P(v_t = j)$)

r_i	Mittlere Erstrückkehrzeit von Knoten $i \in V$ zu Knoten i
R_{xy}	Widerstand bezüglich der Kante $\{x, y\} \in E$
R_{xy}^{eff}	Effektivwiderstand zwischen Knoten $x \in V$ und $y \in V$
$u_{xy}(z)$	Erwartete Anzahl von Besuchen des Knotens $z \in V$, wenn eine Irrfahrt in x startet und so lange dauert bis sie in y endet
$u_{xy}^{\leftrightarrow}(w)$	erwartete Anzahl von Besuchen des Knotens $w \in V$, wenn eine Irrfahrt in x startet und so lange dauert bis sie y erreicht und wieder zu x zurückkehrt
$v(k)_i$	i 'te Komponente des k 'ten Eigenvektors ($v(k)_i = (v(k))_i$)
$v(x)$	Potential im Knoten $x \in V$, bzw. x 'ter Eigenvektor (ist dem Kontext zu entnehmen)
$v_t \ t \geq 0$	markovscher Prozess auf einem Graphen
w	eindeutiger, fixer, positiver Wahrscheinlichkeitsvektor der Übergangsmatrix P (Zeilenvektor)

IV. Vorwort

Diese Bachelorarbeit hat zum Ziel, eine Verbindung zwischen der Markov-Theorie, der Graphentheorie, der Theorie elektrischer Netzwerke und der linearen Algebra herzustellen, um Fragen bezüglich zufälliger Irrfahrten auf Graphen zu klären. Die Arbeiten “mathematisches Projekt” mit dem Titel: “Zufällige Irrfahrten und elektrische Netzwerke” und die Praktikumsarbeit mit dem Titel: “Polya’s Rekurrenz Problem“, im Rahmen meines Bachelorstudiums, bilden die Grundlage dieser Bachelorarbeit. Das Gesamtwerk dieser drei Arbeiten könnte Verwendung in Vorlesungen der angewandten Mathematik finden. Aufgabe war es, die im Folgenden vorgestellten Theoreme und Sätze didaktisch aufzubereiten, um sie den interessierten Leser, welcher die Grundlagen der vorgestellten Teilgebiete der Mathematik und der Elektrotechnik beherrscht, verständlich zu machen. D.h. die Beweise wurden durch Bemerkungen und Einfügen von weiteren Gleichungen zum besseren Verständnis erweitert. Die Originalquellen der Theoreme mit Beweisen werden jeweils angegeben. Insbesondere das später vorgestellte Problem: “Überdeckungszeit von Graphen“, stellte sich in der Bearbeitung als besonders schwierig heraus. Es wurden teilweise schwer nachvollziehbare Beweise geführt, oder auch falsche Annahmen getroffen (siehe Abschnitt 3.4). Beweise bzw. Resultate die überwiegend aus eigenen Überlegungen stammen werden mit “*“ gekennzeichnet. In Abschnitt 4.2 werden eigene Ergebnisse bezüglich mittlerer Erstankunftszeiten spezieller Graphen und in Abschnitt 3.3.2 wird eine selbst ermittelte Grenze für die Überdeckungszeit vorgestellt.

1 Vereinbarungen und Fakten

1.1 Irrfahrten auf ungerichteten Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, endlicher, ungerichteter, schlichter Graph. Unter einer auf dem Graphen $G = (V, E)$ stattfindenden Irrfahrt, verstehen wir einen stochastischen Prozess. Diesen können wir uns anschaulich so vorstellen: Ein Partikel befindet sich zum Zeitpunkt 0 in einem beliebigen Startknoten $v_0 \in V$, im nächsten Zeitschritt bewegt es sich mit Wahrscheinlichkeit $1/\deg(v_0)$ zu einem seiner Nachbarknoten. Allgemein befindet sich das Partikel zum Zeitpunkt t im Knoten v_t und bewegt sich im nächsten Zeitschritt $t + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/\deg(v_t)$ zu einem Nachbarknoten von v_t ($t \geq 0$). Die zufällige Knotenfolge v_0, v_1, \dots stellt einen markovschen Prozess dar. Den Zustandsraum der Markov-Kette bildet dabei die Knotenmenge V . Beginnt die Irrfahrt nicht in einem konkreten Startknoten v_0 , kann aus einer beliebigen Anfangsverteilung P_0 (Spaltenvektor) der Knotenmenge V gestartet werden. Sei P die Übergangsmatrix des markovschen Prozesses, dann gilt für das i, j 'te Element $(P)_{ij}$ der Matrix P :

$$(P)_{ij} = p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(i)} & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Theorie markovscher Ketten ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit sich nach t Schritten im Zustand j zu befinden, folgendermaßen berechnet werden kann (siehe [1], Seite 148):

$$P_t(j) = P(v_t = j) = ((P^T)^t P_0)_j \quad t \geq 0$$

Dabei ist $((P^T)^t P_0)_j$ die j 'te Komponente des Vektors $(P^T)^t P_0$. In Vektorschreibweise:

$$P_t = (P^T)^t P_0$$

1.1.1 Kennwerte zufälliger Irrfahrten

Wir wollen in dieser Arbeit spezielle Kennwerte zufälliger Irrfahrten auf Graphen analysieren. Darunter zählen:

1. **Mittlere Erstankunftszeit** m_{ij} , ist die erwartete Anzahl von Schritten, die benötigt werden, um ausgehend von $i \in V$, $j \in V$ erstmalig zu erreichen. $m_{ii} := 0$.
2. **Pendelzeit** k_{ij} , ist die erwartete Anzahl von Schritten, die benötigt werden, um ausgehend von $i \in V$, $j \in V$ erstmalig zu erreichen und ausgehend von j , wieder zu i zurückzukehren. Es gilt $k_{ij} = m_{ij} + m_{ji}$.
3. **Mittlere Erstrückkehrzeit** r_i , ist die erwartete Anzahl von Schritten, die benötigt

werden, um ausgehend von $i \in V$, wieder zu i zurückzukehren.

4. **Überdeckungszeit** c_{in} , ist die erwartete Anzahl von Schritten, die benötigt werden, um ausgehend von $i \in V$, alle n Knoten des Graphen zu besuchen.

Ein mächtiges Werkzeug, zur Berechnung von Kennwerten zufälliger Irrfahrten, bildet die Theorie der Markov-Ketten. Eine auf einem Graphen stattfindende Irrfahrt kann durch spezielle (ergodische bzw. reguläre) Markov-Ketten, mit bestimmten Eigenschaften, beschrieben werden.

2 Mittlere Erstankunftszeiten

2.1 Ergodische Markov-Ketten

2.1.1 Theoreme zu ergodischen Markov-Ketten

Im folgenden Abschnitt wollen wir die Begriffe, entsprechend der allgemeinen Markov-Theorie, verwenden.

Definition Eine Folge diskreter Zufallsgrößen X_0, X_1, X_2, \dots , die Realisierungen aus der Menge \mathbb{Z} annehmen können, heißt diskrete Markov-Kette mit dem Zustandsraum \mathbb{Z} , wenn für ein beliebiges $n = 1, 2, 3, \dots$ und eine beliebige Folge i_0, i_1, \dots, i_{n+1} mit $i_k \in \mathbb{Z}$ die Beziehung

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

gilt.

D.h. die künftige Entwicklung einer diskreten markovschen Kette, hängt nur vom gegenwärtigen Zustand ab, aber nicht vom Verlauf der Vergangenheit. Der Zustandsraum der Markov-Kette sei im Folgenden $S \subseteq \mathbb{Z}$.

Definition Wir nennen eine Markov-Kette ergodisch, wenn es von jedem beliebigen Zustand möglich ist, zu allen anderen Zuständen zu gelangen.

Oft werden ergodische Ketten auch als irreduzible Ketten bezeichnet.

Definition Wir nennen eine Markov-Kette regulär, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass P^n nur positive Elemente besitzt.

Eine Eigenschaft markovscher Ketten ist die sogenannte Periodizität ($p_{ii}^{(k)} \triangleq$ Wahrscheinlichkeit, ausgehend von Zustand s_i , nach k Schritten wieder im Zustand s_i zu landen).

Definition Der ggT aller $k \geq 1$ mit $p_{ii}^{(k)} > 0$ heißt Periode $p(s_i)$. Ist $p(s_i) = 1$, so heißt s_i aperiodisch.

Weiterhin definieren wir. Eine Markov-Kette...

- heißt irreduzibel, wenn es für alle Zustände $s_i \in S$ und $s_j \in S$ einen Weg von s_i nach s_j mit Bögen positiver Wahrscheinlichkeit (auf dem entsprechend zugeord-

neten gerichteten Graphen der Übergangsmatrix P) gibt .

- die irreduzibel ist, heißt aperiodisch genau dann, wenn $p(s_i) = 1$ $s_i \in S$ ist.

Lemma 1 Eine Markov-Kette ist genau dann regulär, wenn sie irreduzibel und aperiodisch ist. (siehe [3], Seite 8)

Nach diesen Definitionen ist klar, dass eine reguläre Markov-Kette stets ergodisch ist. Andererseits muss eine ergodische Markov-Kette jedoch nicht immer regulär sein. Um den Fundamentalsatz ergodischer Markov-Ketten zu beweisen, sei folgendes Lemma vorangestellt.

Lemma 2 Sei P die $r \times r$ Übergangsmatrix einer markovschen Kette mit lediglich positiven (> 0) Elementen. Mit d bezeichnen wir das kleinste Element von P . Sei y ein reeller Spaltenvektor der Dimension r . Das größte Element von y sei M_0 und das kleinste m_0 . Weiterhin sei M_1 das Größte und m_1 das kleinste Element von Py , dann gilt:

$$M_1 - m_1 \leq (1 - 2d)(M_0 - m_0)$$

(siehe [2], Seite 448)

Beweis: Wir wissen, dass die i 'te Komponente des Vektors Py , gleich dem Mittelwert des Vektors y , bezüglich der i 'ten Verteilung der Matrix P ist (unter der i 'ten Verteilung verstehen wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der i 'ten Zeile von P). Alle möglichen Mittelwerte $(Py)_i$ $i = 1, \dots, r$ sind nach oben durch

$$dm_0 + (1 - d)M_0$$

und nach unten durch

$$dM_0 + (1 - d)m_0$$

beschränkt. Dies wird klar indem wir folgende Umordnung vornehmen (Die folgende Abschätzung wird mit * gekennzeichnet.). Wir wissen

$$(Py)_i = \sum_{j=1}^r p_{ij}(y)_j ,$$

nun werden die Elemente von y und p_i (p_i sei der Zeilenvektor mit den Elementen p_{ij} $j = 1, 2, \dots, r$) umgeordnet.

$$(y)_{k_1} \geq (y)_{k_2} \geq (y)_{k_3} \geq \dots \geq (y)_{k_r}$$

$$(p_i)_{w_1} \geq (p_i)_{w_2} \geq (p_i)_{w_3} \geq \dots \geq (p_i)_{w_r}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (Py)_i &= \sum_{j=1}^r p_{ij}(y)_j \\
 &\leq (p_i)_{w_1}(y)_{k_1} + (p_i)_{w_2}(y)_{k_2} + (p_i)_{w_3}(y)_{k_3} + \dots + (p_i)_{w_r}(y)_{k_r} \\
 &\leq (p_i)_{w_1}(y)_{k_1} + (p_i)_{w_2}(y)_{k_1} + \dots + (p_i)_{w_{r-1}}(y)_{k_1} + (p_i)_{w_r}(y)_{k_r} \\
 &= ((p_i)_{w_1} + (p_i)_{w_2} + (p_i)_{w_3} + \dots + (p_i)_{w_{r-1}})(y)_{k_1} + (p_i)_{w_r}(y)_{k_r} \\
 &= (1 - (p_i)_{w_r})(y)_{k_1} + (p_i)_{w_r}(y)_{k_r} \\
 &\leq (1 - d)M_0 + dm_0
 \end{aligned}$$

Analog kann die untere Schranke hergeleitet werden. Und damit folgt die Behauptung

$$M_1 - m_1 \leq (dm_0 + (1 - d)M_0) - (dM_0 + (1 - d)m_0) = (1 - 2d)(M_0 - m_0) .$$

□

Satz 1 (Fundamentalsatz regulärer Markov-Ketten) Sei P die Übergangsmatrix einer regulären Markov-Kette, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = W$$

Wobei W eine Matrix ist, deren Zeilen alle gleich sind und deren Einträge positiv sind. (siehe [2], Seite 448)

Beweis: Wir wollen zeigen, dass alle Zeilen der Matrix P^n für $n \rightarrow \infty$ identisch sind. Dazu reicht es aus, den Nachweis zu erbringen, dass die Elemente einer beliebigen Spalte der Matrix P^n für $n \rightarrow \infty$ identisch sind. Im Folgenden wird angenommen, dass die Übergangsmatrix P nur positive Elemente besitzt. Um die j 'te Spalte der Matrix P^n zu erhalten, multiplizieren wir die Matrix mit dem j 'ten Einheitsvektor e_j der Dimension r , dabei entspricht r der Mächtigkeit des Zustandsraumes. Sei $r > 1$ und $y \in \mathbb{R}^r$ (Spaltenvektor), mit M_n bezeichnen wir das Maximum der Komponenten von $P^n y$ und mit m_n das Minimum. Für $P^n y$ gilt:

$$P^n y = P P^{n-1} y$$

D.h. die i 'te Komponente des Vektors $P^n y$, ist gleich dem Mittelwert des Vektors $P^{n-1} y$, bezüglich der i 'ten Verteilung der Matrix P . Nach Lemma 2 und der entsprechend gleichen Definition von d gilt:

$$M_n \leq dm_{n-1} + (1 - d)M_{n-1} \leq M_{n-1} ,$$

$$m_n \geq dM_{n-1} + (1 - d)m_{n-1} \geq m_{n-1}$$

↻

$$M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \dots$$

$$m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots$$

Jede Folge ist monoton und für $n \rightarrow \infty$ besitzen beide einen Grenzwert, da

$$m_0 \leq m_n \leq M_n \leq M_0 .$$

Sei M der Grenzwert der Folge M_n und m der Grenzwert der Folge m_n , dann ist $m \leq M$. Wir wollen zeigen, dass $M - m = 0$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) = 0 .$$

Nach dem vorangegangenen Lemma 2 wissen wir

$$\begin{aligned} M_n - m_n &\leq (1 - 2d)(M_{n-1} - m_{n-1}) \\ &\leq (1 - 2d)^2(M_{n-2} - m_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq (1 - 2d)^n(M_0 - m_0) . \end{aligned}$$

Da $r > 1$ und $d \leq \frac{1}{2}$ folgt $0 \leq 1 - 2d < 1$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - m_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2d)^n (M_0 - m_0) = 0 .$$

Da nun $M = m$, wäre gezeigt, dass alle Komponenten des Vektors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n y$$

gleich sind. Insbesondere gilt dies auch, wenn wir $y = e_j$ $j = 1, 2, \dots, r$ setzen und somit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = W .$$

Damit wäre Teil 1 des Beweises gezeigt. Zu zeigen bleibt, dass W nur positive Elemente enthält. Wir wissen, dass die Elemente der Matrix P positiv sind. Damit beinhalten die Vektoren Pe_j $j = 1, 2, \dots, r$ nur positive Elemente. Und somit ist $m_1(e_j) > 0$ für alle Einheitsvektoren e_j $j = 1, 2, \dots, r$ (wobei $m_1(e_j)$ das kleinste Element von Pe_j ist). Da $m_1(e_j) \leq m(e_j)$, ist auch $m(e_j) > 0$. Da die j 'te Spalte der Matrix W , aus den Elementen $m(e_j)$ besteht, wäre auch der zweite Teil des Beweises gezeigt. \square

Der Beweis wurde unter der Annahme geführt, dass die Elemente der Übergangsmatrix P alle positiv sind. Er behält seine Gültigkeit, falls die Elemente der Übergangsmatrix erst für eine gewisse Potenz P^n $n \in \mathbb{N}$ positiv sind, dann wird der Beweis ab dieser Potenz geführt.

Theorem 1 Sei P die Übergangsmatrix einer regulären Markov-Kette mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = W.$$

Weiterhin sei w ein Zeilenvektor, dessen Einträge den Elementen aus einer Zeile von W entsprechen und c ein Spaltenvektor, dessen Komponenten alle 1 sind. Dann gilt:

1. $wP = w$, und jeder Zeilenvektor v für den gilt $vP = v$ ist ein Vielfaches von w .
2. $Pc = c$, und jeder Spaltenvektor x der $Px = x$ erfüllt ist ein Vielfaches von c . (siehe [2], Seite 435)

Beweis: Nach Satz 1 wissen wir, dass für $n \rightarrow \infty : P^n \rightarrow W$. Damit gilt

$$P^{n+1} = P^n P \rightarrow WP,$$

ebenso konvergiert $P^{n+1} \rightarrow W$ und somit ist $WP = W \cap w = wP$. Sei v ein beliebiger Zeilenvektor mit $v = vP$. Dann ist $v = vP^n$, mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir $v = vW$. Wir definieren

$$\alpha = \sum_{i=1}^r (v)_i,$$

betrachten wir die j 'te Komponente von vW , so erhalten wir

$$\begin{aligned} (vW)_j &= (v)_1 w_{1j} + (v)_2 w_{2j} + (v)_3 w_{3j} + \dots + (v)_r w_{rj} \\ &= ((v)_1 + (v)_2 + (v)_3 + \dots + (v)_r) (w)_j \\ &= \alpha (w)_j \\ &= (v)_j. \end{aligned}$$

Womit gezeigt wäre, dass $v = \alpha w$. Kommen wir zur zweiten Aussage des Theorems. Sei x ein Spaltenvektor der $Px = x$ erfüllt, dann gilt auch $P^n x = x$. Mit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir $Wx = x$. Da alle Zeilen von W gleich sind, gilt dies auch für die Komponenten von Wx und damit für x . Somit ist x ein Vielfaches von c . \square

Verknüpfen wir nun den Fundamentalsatz und Theorem 1, kann es nur einen Wahrscheinlichkeitsvektor w geben, der $wP = w$ erfüllt. Dies wird klar, indem wir alle Elemente des \mathbb{R}^r mit nur positiven Komponenten betrachten. Diese Menge bildet einen Quadranten des \mathbb{R}^r , wobei alle auf den Achsen liegenden Elemente entfernt werden. Erfüllt ein Vektor v die Gleichung $vP = v$, so liegt er in dieser Menge. Nach Theorem 2 wissen wir, dass lediglich noch ein Vielfaches von v die Gleichung erfüllen kann. Betrachten wir alle Wahrscheinlichkeitsvektoren des \mathbb{R}^r mit der Restriktion, dass alle Komponenten positiv sind, können diese durch die Menge M dargestellt werden.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^r \mid (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = 1, x_i > 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, r)\}$$

Da die Menge M , eine Teilmenge einer Hyperebene des \mathbb{R}^r beschreibt, kann es nur einen Vektor geben, der in der Menge M liegt und Vielfaches von v ist. Illustriert wird diese Beobachtung in Abbildung 2.1.1.

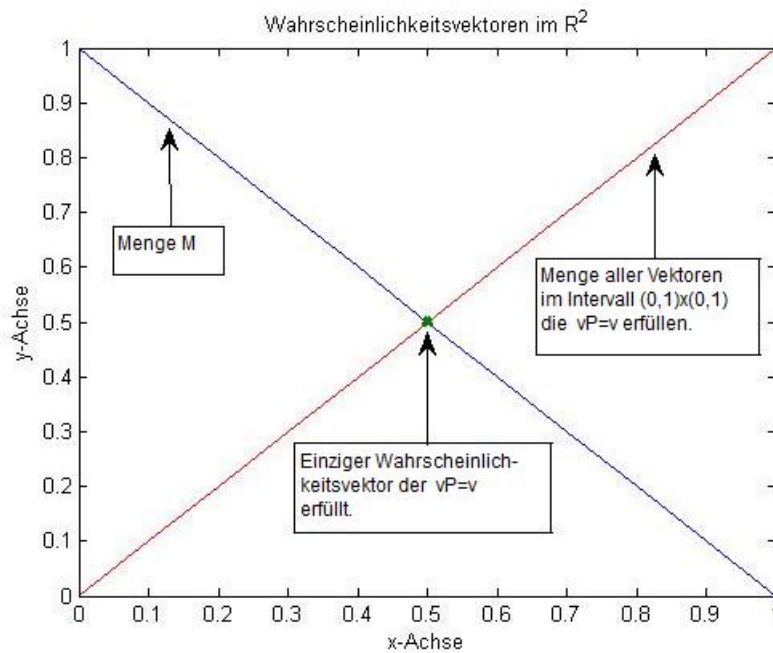


Abbildung 2.1.1: Wahrscheinlichkeitsvektoren im \mathbb{R}^2

Theorem 2 Sei P die Übergangsmatrix einer regulären Markov-Kette und v ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsvektor (Zeilenvektor), dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} vP^n = w ,$$

wobei w der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor ($wP = w$) der Matrix P ist. (siehe [2], Seite 437)

Beweis: Wir wissen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n &= W \\ \curvearrowright \lim_{n \rightarrow \infty} vP^n &= vW = w . \end{aligned}$$

□

Dieses Theorem sagt aus, dass egal von welcher Anfangsverteilung der Zustände, die Wahrscheinlichkeit, nach sehr langer Zeit im Zustand $s_i \in S$ zu landen, gleich $(w)_i$ ist. Viele interessante Resultate bezüglich regulärer Markov-Ketten beruhen auf dem Fakt, dass die Übergangsmatrix P einen eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektor w besitzt. Wir wollen zeigen, dass auch für ergodische Markov-Ketten ein solcher Wahrscheinlichkeitsvektor w existiert.

Theorem 3 Für ergodische Markov-Ketten existiert ein eindeutiger, fixer, positiver Wahrscheinlichkeitsvektor w der Übergangsmatrix P , so dass gilt $wP = w$. Ein beliebiger Zeilenvektor v der ebenfalls $vP = v$ erfüllt, ist ein Vielfaches von w . Ein beliebiger Spaltenvektor x der $Px = x$ erfüllt, ist ein konstanter Vektor (d.h. $(x)_i = a, a \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r$). (siehe [2], Seite 438)

Beweis: * Wir betrachten die Matrix $\bar{P} = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}P$ ($I \triangleq r \times r$ Einheitsmatrix). Die Matrix P ist auf Grund der Ergodizität irreduzibel. Gleiches gilt für die Matrix \bar{P} , wegen des Terms $\frac{1}{2}P$. Der zusätzliche Term $\frac{1}{2}I$ in \bar{P} sorgt dafür, dass die Rückkehr für einen beliebigen Zustand $s \in S, \forall n \in \mathbb{N}$ in n Schritten möglich. D.h. \bar{P} ist aperiodisch. Nach Lemma 1 ist \bar{P} regulär. $\leadsto \exists$ ein eindeutiger, fixer, positiver Wahrscheinlichkeitsvektor w der Übergangsmatrix \bar{P} , mit $w\bar{P} = w$. Dann gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} w\bar{P} &= w\frac{1}{2}I + w\frac{1}{2}P = w \\ &\iff \frac{1}{2}wP = \frac{1}{2}w \\ &\iff wP = w \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Ein Vektor der Form $v = \alpha w, \alpha \in \mathbb{R}$ erfüllt ebenfalls Gleichung 2.1.1. Angenommen es existiert ein weiterer Vektor z , der kein Vielfaches von w ist, für den gilt $zP = z$. Dann müsste aber weiterhin gelten

$$zP = z \iff \frac{1}{2}zP = \frac{1}{2}z \iff z\frac{1}{2}I + z\frac{1}{2}P = z \iff z\bar{P} = z.$$

Dies steht im Widerspruch zu Theorem 1.

Wir wissen, nur ein konstanter Vektor x erfüllt $\bar{P}x = x, \leadsto (\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}P)x = x \leadsto Px = x$. Mit gleichen Überlegungen, wie im vorangegangenen Beweisschritt, können nur konstante Vektoren $Px = x$ erfüllen. \square

Theorem 4 Sei P die Übergangsmatrix einer ergodischen Markov-Kette. Die Matrix A_n sei folgendermaßen definiert

$$A_n = \frac{I + P + P^2 + \dots + P^n}{n+1}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = W$$

Wobei W eine Matrix ist, deren Zeilen dem eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektor der Matrix P entsprechen. (siehe [2], Seite 438)

Beweis: * Wir betrachten (Beachte: $PW = W$, siehe Abschnitt 2.1.2.)

$$\begin{aligned} (1 + P + P^2 + \dots + P^{n-1})(1 - P + W) &= \\ (1 + P + P^2 + \dots + P^{n-1}) - (P + P^2 + \dots + P^n) + (W + PW + P^2W + \dots + P^{n-1}W) &= \\ 1 - P^n + nW &. \end{aligned}$$

In Abschnitt 2.1.2 wird gezeigt, dass $(1 - P + W)^{-1} = Z$ existiert und dass $WZ = W$ (siehe Gleichung 2.1.2). Wir erhalten

$$\begin{aligned} (1 + P + P^2 + \dots + P^{n-1}) &= (1 - P^n + nW)Z \\ &= Z - P^n Z + nWZ \\ &= Z - P^n Z + nW \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + P + P^2 + \dots + P^{n-1})}{n} &= \frac{Z}{n} - \frac{P^n Z}{n} + W \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Da P die Übergangsmatrix einer ergodischen Markov Kette ist, können für $\frac{P^n Z}{n}$ mit $n \rightarrow \infty$ keine unbestimmten Ausdrücke entstehen. Es folgt ($0 \triangleq \text{Nullmatrix}$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + P + P^2 + \dots + P^{n-1})}{n} = 0 - 0 + W = W$$

□

Wir wollen eine anschauliche Interpretation des Theorems liefern. Wir betrachten eine ergodische Markov-Kette, welche im Zustand $s_i \in S$ startet. $X^{(m)}$ $m \geq 0$ sei eine Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, falls sich der Prozess im m 'ten Schritt im Zustand $s_j \in S$ befindet und andernfalls den Wert 0 annimmt. Dann ist die zufällige relative Häufigkeit H_n der Besuchsanzahlen des Zustandes s_j in den ersten n Schritten gleich

$$H_n = \frac{X^{(0)} + X^{(1)} + \dots + X^{(n)}}{n + 1}.$$

Wir wissen $P(X^{(m)} = 1) = (P^m)_{ij} = p_{ij}^{(m)}$ und $P(X^{(m)} = 0) = 1 - p_{ij}^{(m)}$. Betrachten wir

nun den Erwartungswert der Zufallsgröße H_n

$$\begin{aligned}
 E(H_n) &= E\left(\frac{X^{(0)} + X^{(1)} + \dots + X^{(n)}}{n+1}\right) \\
 &= \frac{E(X^{(0)}) + E(X^{(1)}) + \dots + E(X^{(n)})}{n+1} \\
 &= \frac{p_{ij}^{(0)} + p_{ij}^{(1)} + \dots + p_{ij}^{(n)}}{n+1} \\
 &= (A_n)_{ij},
 \end{aligned}$$

so ist dieser gleich dem i,j 'ten Element der Matrix A_n und gibt die mittlere Proportion von Besuchen des Zustandes s_j in den ersten n Schritten der Irrfahrt wieder. Da nach Theorem 4 die Matrix A_n gegen W konvergiert, sind wir in der Lage ein Gesetz der großen Zahlen für ergodische Markov-Ketten zu formulieren.

Theorem 5 (Gesetz der großen Zahlen für ergodische Markov-Ketten) Sei $H_j^{(n)}$ die zufällige relative Häufigkeit von Besuchen des Zustandes s_j , in den ersten n Schritten einer ergodischen Markov-Kette. Dann gilt unabhängig vom Anfangszustand und $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|H_j^{(n)} - (w)_j| > \varepsilon) = 0.$$

(siehe [2], Seite 439)

Bemerkung Mit diesen Resultaten erhalten wir folgende Interpretationen des eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektors w der Übergangsmatrix P .

1. Ist die Markov-Kette regulär, dann entspricht $(w)_j$ $j = 1, 2, \dots, r$ der Wahrscheinlichkeit, unabhängig von der Anfangsverteilung, nach sehr langer Zeit im Zustand s_j zu landen. Außerdem gibt sie die mittlere Proportion von Besuchen des Zustandes s_j in einem sehr langen "Lauf" wieder.
2. Ist die Markov-Kette ergodisch, dann entspricht $(w)_j$ $j = 1, 2, \dots, r$ lediglich der mittleren Proportion von Besuchen des Zustandes s_j in einem sehr langen "Lauf".

Bevor wir zur Anwendung dieser umfangreichen Theorie kommen, soll an dieser Stelle noch die Fundamentalmatrix ergodischer Markov-Ketten eingeführt werden.

2.1.2 Die Fundamentalmatrix ergodischer Markov-Ketten

Gegeben sei die Übergangsmatrix P einer regulären Markov-Kette. Wir betrachten

$$I + (P - W) + (P^2 - W) + (P^3 - W) + \dots$$

Uns ist bekannt, dass ${}_wP = {}_w \curvearrowright WP = W$, es ist aber auch ${}^*PW = W$ da $PW = (W^T P^T)^T = (W^T)^T = W$. D.h. die Multiplikation von P und W ist kommutativ. Außerdem ist $W^k = W$. Beachten wir diese Tatsachen, ergibt sich für die Potenz $(P - W)^n$ die Gleichung

$$\begin{aligned} (P - W)^n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} P^{n-i} W^i \\ &= P^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} W^i \\ &= P^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} W \\ &= P^n - W. \end{aligned}$$

Bemerkung $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = (1 - 1)^n = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} = -1$

Wir erhalten

$$I + (P - W) + (P^2 - W) + (P^3 - W) + \dots = I + (P - W) + (P - W)^2 + (P - W)^3 + \dots$$

Da $P^n - W \rightarrow 0$ und damit $(P - W)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, konvergieren diese Reihen (die rechte Seite der Gleichung entspricht dann der geometrischen Reihe) und wir können schreiben

$$I + (P - W) + (P - W)^2 + (P - W)^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (P - W)^i = (I - P + W)^{-1}.$$

Für reguläre Markov-Ketten wissen wir, dass $P^n \rightarrow W$ für $n \rightarrow \infty$. Ist die Markov-Kette jedoch nur ergodisch, können wir lediglich sagen, dass $A^n \rightarrow W$ für $n \rightarrow \infty$. Jedoch gibt der folgende Satz Auskunft darüber, dass $(I - P + W)^{-1}$ auch für ergodische Markov-Ketten existiert.

Satz 2 Sei $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$ die Übergangsmatrix einer ergodischen Markov-Kette, W die Matrix, deren Zeilen dem eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektor ${}_w$ der Matrix P entsprechen. Dann besitzt die Matrix $(I - P + W)$ eine Inverse. (siehe [2], Seite 457)

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^r$ ein beliebiger Spaltenvektor, wir betrachten

$$\begin{aligned}(I - P + W)x &= 0 \\ w(I - P + W)x &= 0 \\ (w - wP + wW)x &= 0 \\ wWx &= 0 \\ wx &= 0\end{aligned}$$

$$\leadsto Wx = 0.$$

Es bleibt

$$\begin{aligned}(I - P)x &= 0 \\ Px &= x\end{aligned}$$

Nach Theorem 1 muss x ein konstanter Vektor sein. Da $(w)_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, r$, ist $x = 0$ der einzige Vektor der $wx = 0$ erfüllt. \square

Wir nennen die Matrix $Z = (I - P + W)^{-1}$, Fundamentalmatrix einer ergodischen Markov-Kette.

Lemma 3 Sei $Z = (I - P + W)^{-1}$ die Fundamentalmatrix einer ergodischen Markov-Kette, c ein Spaltenvektor, dessen Komponenten alle 1 sind und w der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Matrix P . Dann gilt:

1. $Zc = c$
2. $wZ = w$
3. $Z(I - P) = I - W$ (siehe [2], Seite 458-459)

Beweis: Wir wissen $Pc = c$, $Wc = c$ und damit ist

$$\begin{aligned}c &= (I - P + W)c \\ \leadsto Zc &= c.\end{aligned}$$

Da $wP = w$ und $wW = w$, ist

$$\begin{aligned}w(I - P + W) &= w - wP + wW = w \\ \leadsto w &= wZ.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Wir betrachten die folgende Gleichung mit der Kenntnis, dass $PW = W$ und $W^2 = W$

$$\begin{aligned}
 (1 - P + W)(1 - W) &= 1 - P + W - W + PW - W^2 \\
 &= 1 - P + W - W + W - W \\
 &= 1 - P \\
 \curvearrowright (1 - W) &= Z(1 - P) .
 \end{aligned}$$

□

2.1.3 Berechnung mittlerer Erstankunftszeiten

In Abschnitt 1.1.1 haben wir die Definitionen spezieller Kennwerte zufälliger Irrfahrten eingeführt. Nun wollen wir erste Gleichungen für diese aufstellen.

Es gilt:

$$m_{ij} = 1 + \sum_k p_{ik} m_{kj} \quad i \neq j \quad (2.1.3)$$

Ausgehend vom Zustand $s_i \in S$, befindet sich der Prozess nach einem Schritt mit Wahrscheinlichkeit 1 in einem seiner Nachbarzustände. Dieser Schritt wird in Gleichung 2.1.3 mit 1 berücksichtigt. Ausgehend von einem Nachbarzustand s_k , benötigen wir von diesem im Mittel m_{kj} Schritte, um s_j zu erreichen. Da der Nachbarzustand zufällig gewählt wird, müssen wir das gewichtete Mittel über alle m_{kj} bilden, woraus sich Gleichung 2.1.3 ergibt. Durch analoge Überlegungen gilt für r_i

$$r_i = 1 + \sum_k p_{ik} m_{ki} .$$

Sei M eine Matrix mit $(M)_{ij} = m_{ij}$, D eine Diagonalmatrix mit den Elementen $(D)_{ii} = r_i$ und C eine entsprechende Matrix deren Einträge alle 1 sind, dann gilt:

$$M = PM + C - D \quad (2.1.4)$$

Da wir vereinbarten, dass $m_{ii} = 0$, muss die Matrix D in Gleichung 2.1.4 subtrahiert werden. Eine Umstellung der Formel ergibt

$$(1 - P)M = C - D .$$

2.1.3.1 Mittlere Erstrückkehrzeit

Theorem 6 Für die mittlere Erstrückkehrzeit einer ergodischen Markov-Kette gilt:

$$r_i = \frac{1}{(w)_i}$$

Wobei w der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Matrix P ist. (siehe [2], Seite 455)

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}(I - P)M &= C - D \\ w(I - P)M &= w(C - D) \\ (w - wP)M &= w(C - D)\end{aligned}$$

Da $w - wP = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned}w(C - D) &= 0 \\ wC - wD &= 0 \\ wC &= wD \\ c &= wD.\end{aligned}$$

Dabei ist c ein Zeilenvektor, dessen Einträge alle 1 sind. Betrachten wir die i 'te Komponente dieser Vektorgleichung, folgt:

$$\begin{aligned}1 &= (w)_i (D)_{ii} \\ &= (w)_i r_i\end{aligned}$$

□

Mit Theorem 6 haben wir nun die Möglichkeit, die mittlere Erstrückkehrzeit über w zu berechnen.

2.1.3.2 Mittlere Erstankunftszeit

Theorem 7 Sei $Z = (I - P + W)^{-1}$ die Fundamentalmatrix einer ergodischen Markov-Kette und w der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Matrix P , dann gilt für die mittlere Erstankunftszeit

$$m_{ij} = \frac{(Z)_{jj} - (Z)_{ij}}{(w)_j} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{(w)_j}.$$

(siehe [2], Seite 459)

Beweis: Wir wissen:

$$\begin{aligned}(1-P)M &= C - D \\ Z(1-P)M &= ZC - ZD\end{aligned}$$

Nach Lemma 3 ist $Z(1-P) = 1 - W$ und $ZC = C$, damit folgt

$$(1-W)M = C - ZD$$

$$M = C - ZD + WM.$$

$$\curvearrowright (M)_{ij} = m_{ij} = 1 - z_{ij}r_j + w(M)_j$$

$(M)_j$ ist dabei die j 'te Spalte von M . Da $m_{jj} = 0$ erhalten wir

$$m_{jj} = 0 = 1 - z_{jj}r_j + w(M)_j.$$

$$\curvearrowright w(M)_j = z_{jj}r_j - 1$$

Für m_{ij} gilt dann

$$\begin{aligned}m_{ij} &= 1 - z_{ij}r_j + z_{jj}r_j - 1 \\ &= (z_{jj} - z_{ij})r_j.\end{aligned}$$

Da $r_j = \frac{1}{(w)_j}$, erhalten wir das Resultat

$$m_{ij} = \frac{(z_{jj} - z_{ij})}{(w)_j}.$$

□

2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Symmetrische Matrizen spielen in dieser Arbeit eine große Rolle, da die Adjazenzmatrix eines Graphen $G = (V, E)$ stets symmetrisch ist. Im Folgenden werden einige Sätze und Eigenschaften symmetrischer Matrizen vorgestellt, um diese später anzuwenden.

Definition Wir nennen eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, wenn gilt:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

Satz 3 Für eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

1. M hat nur reelle Eigenwerte.
2. Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal. (1. siehe [15]; 2. siehe [12], Seite 151)

Beweis: Sei $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von M , d.h. $Mx = \lambda x$. Dann gilt

$$x^T M \bar{x} = x^T \overline{Mx} = x^T \overline{\lambda x} = x^T \bar{\lambda} \bar{x} = \bar{\lambda} x^T \bar{x} = \bar{\lambda} \|x\|^2.$$

\bar{x} bedeutet dabei die Konjugation von x (komponentenweise), $x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^n (x)_i (\bar{y})_i$ ist das komplexe Skalarprodukt und $\|x\|$ ist die durch dem Skalarprodukt induzierte Norm. Es gilt aber auch

$$x^T M \bar{x} = x^T M^T \bar{x} = (Mx)^T \bar{x} = (\lambda x)^T \bar{x} = \lambda x^T \bar{x} = \lambda \|x\|^2.$$

$$\leadsto \lambda = \bar{\lambda}$$

Und damit muss λ reell sein. Zum zweiten Teil des Satzes. Es seien x, y Eigenvektoren von M zu verschiedenen Eigenwerten λ_x, λ_y . Dann gilt:

$$\lambda_x x^T \bar{y} = (Mx)^T \bar{y} = x^T M^T \bar{y} = x^T \overline{My} = x^T \bar{\lambda}_y \bar{y} = \lambda_y x^T \bar{y}$$

$$\leadsto (\lambda_x - \lambda_y) x^T \bar{y} = 0$$

Da aber $\lambda_x \neq \lambda_y$, muss $x^T \bar{y} = 0$ sein. □

Weiterhin gilt, dass der \mathbb{R}^n eine Basis aus Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt, dabei handelt es sich um eine Orthogonalbasis (siehe [12], Seite 152). Da sich aus einer Orthogonalbasis stets eine Orthonormalbasis herstellen lässt, ist eine symmetrische Matrix nicht nur stets diagonalisierbar, sondern die Diagonalisierung ist stets durch eine orthogonale Matrix möglich.

Satz 4 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $x(1), x(2), \dots, x(n)$. Die zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Wir bilden die Matrix $C = (x(1), x(2), \dots, x(n))$. Dann ist $C^{-1}AC = \Lambda$, wobei $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. (siehe [15])

Beweis: Es gilt:

$$Ax(i) = \lambda_i x(i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$AC = CA,$$

oder

$$C^{-1}AC = \Lambda.$$

□

Mit diesen Satz können wir den Spezialfall, A ist symmetrisch formulieren.

Satz 5 Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist

$$M = Q\Lambda Q^T$$

eine Diagonalisierung von M . Λ ist dabei eine Diagonalmatrix mit

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

und Q eine orthogonale Matrix, deren Spalten den orthonormierten Eigenvektoren von M entsprechen. (siehe [12], Seite 152)

Beweis: Da sich aus den Eigenvektoren von M eine Orthonormalbasis konstruieren lässt, ist die Matrix Q orthogonal und somit $Q^{-1} = Q^T$, nach Satz 4 folgt

$$M = Q\Lambda Q^T.$$

□

Wir sind nun in der Lage, eine symmetrische Matrix in ihrer Spektralform darzustellen. Es gilt:

$$M = Q\Lambda Q^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i x(i)x(i)^T$$

Satz 6 (Satz von Perron und Frobenius) Die Matrix $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ sei symmetrisch, unzerlegbar und $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$. Dann gilt für $n \geq 2$:

1. $\lambda_1(A)$ ist positiv, hat die Vielfachheit 1, ist betragsmäßig maximaler Eigenwert und zugleich der einzige Eigenwert, der einen Eigenvektor mit nur positiven Einträgen besitzt.
2. $\lambda_n(A) = -\lambda_1(A)$ dann und nur dann, wenn A sich durch simultanes Zeilen-/Spalten-

tauschen in eine Matrix der Blockgestalt $\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ überführen lässt. In diesem Fall hat $\lambda_n(A)$ ebenfalls Vielfachheit 1.

Der Beweis von Satz 6 ist in [7], Seite 29 zu finden.

Bemerkung Für unsere Zwecke bedeutet die Unzerlegbarkeit von Matrizen, dass der Graph der Adjazenzmatrix zusammenhängend ist.

2.3 Eigenwerte und Grenzverteilung

In Abschnitt 2.1 wurde ausführlich über die Existenz und den Eigenschaften des eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektors w der Übergangsmatrix P berichtet. Definieren wir nun eine Irrfahrt auf einem ungerichteten, endlichen, schlichten und zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, mit den in Abschnitt 1.1 vorgestellten Übergangswahrscheinlichkeiten, so kann der auf dem Graphen stattfindende stochastische Prozess, durch eine ergodische Markov-Kette beschrieben werden. Ist der Prozess zudem aperiodisch, wird die Irrfahrt durch eine reguläre Markov-Kette beschrieben.

Theorem 8 *Eine Irrfahrt auf einem ungerichteten, endlichen, zusammenhängenden, schlichten Graphen ist genau dann aperiodisch, wenn G nicht bipartit ist. (siehe [4], Seite 31)*

Beweis: Wir wissen, ein Graph ist genau dann bipartit, wenn alle Kreise des Graphen eine gerade Länge besitzen. Demzufolge ist die Rückkehr zu einem beliebigen Knoten $x \in V$ nur in einer geraden Anzahl von Schritten möglich. Die schnellstmögliche Rückkehr in einem bipartiten Graphen beträgt 2 Schritte, es folgt $p(x) = 2 \forall x \in V$.

\Rightarrow Ist nun eine auf einem Graphen stattfindende Irrfahrt aperiodisch, so gilt $p(x) = 1 \forall x \in V$. Dies impliziert, dass der Graph nicht bipartit sein darf. \Leftarrow Ist nun der Graph nicht bipartit, so besitzt der Graph einen Kreis ungerader Länge. Für jeden Knoten des Graphen können wir dadurch in einer geraden, oder ungeraden Anzahl von Schritten zurückkehren. Es folgt $p(x) = 1 \forall x \in V$ und damit ist die Irrfahrt aperiodisch. \square

Bemerkung Findet eine Irrfahrt auf einem...

- bipartiten Graphen statt, so wird dieser stochastische Prozess durch eine ergodische Markov-Kette beschrieben.
- nicht bipartiten Graphen statt, so wird dieser stochastische Prozess durch eine reguläre Markov-Kette beschrieben.

All jene Eigenschaften lassen sich auch aus der speziellen Struktur der Übergangsmatrix P herleiten. Wir wissen, für jede ergodische Markov-Kette existiert ein eindeutiger, fixer, positiver Wahrscheinlichkeitsvektor w der Matrix P .

Lemma 4 *Für einen ungerichteten, endlichen, zusammenhängenden, schlichten Graphen $G = (V = \{1, 2, \dots, n\}, E)$, hat w die Form $w = (deg(1)/2m, deg(2)/2m, \dots, deg(n)/2m)$, wobei $m = |E|$. (siehe [4], Seite 32)*

Beweis: Es gilt $(w)_i > 0 \ i = 1, 2, \dots, n$, und $\sum_{i=1}^n (w)_i = \sum_{i=1}^n \frac{deg(i)}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n deg(i) = \frac{2m}{2m} = 1$. Bleibt zu zeigen, dass $wP = w$. Dazu betrachten wir $w(P)_i \ ((P)_i \triangleq i\text{te Spalte}$

von P) und erhalten

$$w(P)_i = \sum_{k=1}^n \frac{\deg(k)}{2m} p_{ki} = \sum_{j \in N(i)} \frac{\deg(j)}{2m} \frac{1}{\deg(j)} = \frac{1}{2m} \sum_{j \in N(i)} 1 = \frac{\deg(i)}{2m} = (w)_i.$$

Da i beliebig gewählt wurde, gilt $wP = w$. □

Wir wollen nun mittels spektraler Eigenschaften des Graphen $G = (V, E)$ zeigen, dass für nicht bipartite Graphen und für eine beliebige Anfangsverteilung P_0 gilt: $P_t(j) \rightarrow (w)_j$ für $t \rightarrow \infty$. Die Übergangsmatrix P hat den größten Eigenwert 1 (beachte Satz 6, Teil 1 und die Eigenwerteigenschaft der im Folgenden eingeführten Matrix N), mit den entsprechenden linken Eigenvektor w und den rechts korrespondierenden Eigenvektor c ($(c)_i = 1$ $i = 1, 2, \dots, n$). Die Matrix P ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, es sei denn $G = (V, E)$ ist regulär (alle Knoten besitzen gleichen Knotengrad). Aber wir können die Matrix P in eine symmetrische Form überführen. Für die Matrix P gilt $P = DA$. Dabei ist A die Adjazenzmatrix des Graphen und D eine Diagonalmatrix mit $D = \text{diag}(1/\deg(1), \dots, 1/\deg(n))$. Betrachten wir die Matrix $N = D^{1/2}AD^{1/2} = D^{-1/2}PD^{1/2}$, so ist N symmetrisch und besitzt die gleichen Eigenwerte wie P (siehe [6], Seite 21-22; [5], Seite 14-15).

Beweis: Die Matrix N ist symmetrisch *, denn es gilt:

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}}, \\ n_{ji} &= \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}} a_{ji} \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} n_{ij} - n_{ji} &= \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}} - \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}} a_{ji} \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}} (a_{ij} - a_{ji}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\deg(i)}} \frac{1}{\sqrt{\deg(j)}} (a_{ij} - a_{ij}) \quad (A \text{ ist symmetrisch}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow n_{ij} = n_{ji}$$

Da $D^{1/2} = \text{diag}(1/\sqrt{\deg(1)}, 1/\sqrt{\deg(2)}, \dots, 1/\sqrt{\deg(n)})$, existiert $D^{-1/2}$ mit $D^{-1/2} = \text{diag}(\sqrt{\deg(1)}, \sqrt{\deg(2)}, \dots, \sqrt{\deg(n)})$ und $A = D^{-1/2}ND^{-1/2}$.

$$\curvearrowright P = DA = DD^{-1/2}ND^{-1/2} = D^{1/2}ND^{-1/2}$$

Sei nun $Px = \lambda x$, dann ist

$$Px = D^{1/2}ND^{-1/2}x = \lambda x.$$

Multiplikation mit $D^{-1/2}$ liefert

$$D^{-1/2}D^{1/2}ND^{-1/2}x = ND^{-1/2}x = \lambda D^{-1/2}x.$$

Setzen wir $q = D^{-1/2}x$, folgt

$$Nq = \lambda q.$$

$\curvearrowright \lambda$ ist Eigenwert von N mit dem Eigenvektor q . □

Da N symmetrisch ist, können wir die Matrix nach Abschnitt 2.2 in ihrer Spektralform darstellen.

$$N = \sum_{i=1}^n \lambda_i v(i) v(i)^T$$

$v(i)$ sind die orthonormierten Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i . Die Eigenwerte treten entsprechend der Ordnung $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ auf. Da c Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 ist, so ist $D^{-1/2}c = z = (\sqrt{\deg(1)}, \sqrt{\deg(2)}, \dots, \sqrt{\deg(n)})^T$ ein Eigenvektor von N zum Eigenwert 1. Da dieser Eigenvektor nur positive Komponenten enthält, folgt nach dem Frobenius Perron Theorem (siehe Satz 6)

$$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq -1.$$

Für $v(1)$ erhalten wir nach Normierung von z

$$v(1) = \frac{1}{\sqrt{2m}} z \Rightarrow v(1)_i = \sqrt{\frac{\deg(i)}{2m}} = \sqrt{(w)_i}. \quad (2.3.1)$$

Ist $G = (V, E)$ nicht bipartit so gilt $\lambda_n > -1$ (siehe [8], Seite 7). Mit diesen Vorbetrachtungen erhalten wir für $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P^t &= (D^{1/2}ND^{-1/2})^t \\ &= D^{1/2}ND^{-1/2}D^{1/2}ND^{-1/2} \dots D^{1/2}ND^{-1/2} \\ &= D^{1/2}N^t D^{-1/2} \\ &= D^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v(i) v(i)^T \right)^t D^{-1/2}. \end{aligned}$$

Beachten wir die Orthonormiertheit der Eigenvektoren, so verbleiben aus $(\sum_{i=1}^n \lambda_i v(i) v(i)^T)^t$ lediglich die Terme mit gleichen Eigenwerten. Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_i v(i) v(i)^T \lambda_i v(i) v(i)^T \dots \lambda_i v(i) v(i)^T &= \lambda_i^t v(i) v(i)^T v(i) v(i)^T \dots v(i) v(i)^T \\ &= \lambda_i^t v(i) 1 1 \dots 1 v(i)^T \\ &= \lambda_i^t v(i) v(i)^T \end{aligned}$$

Für gemischtgliedrige Terme treten im Produkt Ausdrücke der Form $v(i)^T v(j)$ $i \neq j$ auf, welche auf Grund der Orthonormiertheit 0 ergeben. Daraus folgt für P^t

$$\begin{aligned} P^t &= D^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v(i) v(i)^T \right)^t D^{-1/2} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^t D^{1/2} v(i) v(i)^T D^{-1/2} \\ &= Q + \sum_{i=2}^n \lambda_i^t D^{1/2} v(i) v(i)^T D^{-1/2}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} Q &= \lambda_1^t D^{1/2} v(1) v(1)^T D^{-1/2} \\ &= \lambda_1^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\deg(1)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\deg(n)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\deg(1)}{2m} & \dots & \sqrt{\frac{\deg(1)\deg(n)}{2m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \sqrt{\frac{\deg(n)\deg(1)}{2m}} & \dots & \frac{\deg(n)}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\deg(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\deg(1)} \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für $p_{ij}^{(t)}$ erhalten wir:

$$p_{ij}^{(t)} = (w)_j + \sum_{k=2}^n \lambda_k^t v(k)_i v(k)_j \sqrt{\frac{\deg(j)}{\deg(i)}} \quad (2.3.2)$$

Ist der Graph $G = (V, E)$ nicht bipartit, gilt für die Eigenwerte: $|\lambda_i| < 1$ $i = 2, 3, \dots, n$. Und wir erhalten das erwünschte Resultat, entsprechend regulärer Markov-Ketten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = (w)_j.$$

D.h. für eine auf einem nicht bipartiten Graphen stattfindende Irrfahrt, konvergiert die Folge P_0, P_1, \dots gegen die Grenzverteilung w , mit $(w)_j = \deg(j)/2m = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)}$ $i \in V$.

2.4 Elektrische Netzwerke und Kennwerte zufälliger Irrfahrten

In dem Werk von Doyle und Snell (siehe [9]) werden ausführlich Äquivalenzen zwischen elektrischen Netzwerken und Kennwerten zufälliger Irrfahrten vorgestellt. Die Definitionen und Vereinbarungen bezüglich zufälliger Irrfahrten auf elektrischen Netzwerken, sind in [9], ab Seite 29 zu finden. Weitere Äquivalenzen liefert das Werk von Prasad Tetali (siehe [10]). Betrachten wir eine auf einem ungerichteten, endlichen, zusammenhängenden, schlichten Graphen $G = (V, E)$ stattfindende Irrfahrt, so besteht das zugeordnete elektrische Netzwerk $G = (V, E, C)$ aus der gleichen Knoten und Kantenmenge, und einer Funktion $C : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. D.h. jeder Kante wird ein nicht negativer Leitwert $C(\{x, y\}) = C_{xy}$ zugeordnet. Dieser soll für alle weiteren Betrachtungen 1 sein. Demzufolge gilt auch für alle Widerstände $R_{xy} = 1/C_{xy} = 1 \ \forall \{x, y\} \in E$. Wollen wir nun eine Irrfahrt auf $G = (V, E, C)$ definieren, so führen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{xy} ein.

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{C_{xy}}{C_x} & \text{falls } \{x, y\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{falls } \{x, y\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $C_x = \sum_{y \in N(x)} C_{xy} = \deg(x)$. D.h. sind alle Widerstände Einheitswiderstände, so erhalten wir die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten wie in Abschnitt 1.1 vorgestellt.

Theorem 9 *Der Effektivwiderstand R_{xy}^{eff} zwischen Knoten x und y , ist gleich der erwarteten Anzahl von Überquerungen einer beliebigen Kante $\{x, z\} \in E$ von x nach z , wenn eine Irrfahrt in x startet und so lange dauert bis sie in y endet. (siehe [10], Seite 102)*

Beweis: Sei $u_{xy}(z)$ die erwartete Anzahl von Besuchen des Knotens $z \in V$, wenn eine Irrfahrt in x startet und so lange dauert bis sie in y endet. Dann gilt $u_{xy}(y) = 0$. Wir wissen, jeder Besuch eines Knotens $z \in V$ erfolgt über einen seiner Nachbarknoten $w \in N(z)$, wodurch wir erhalten (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} u_{xy}(z) &= \sum_{w \in N(z)} u_{xy}(w) p_{wz} \\ &= \sum_{w \in N(z)} \frac{u_{xy}(w)}{\deg(w)}, \quad z \in V \setminus \{x, y\} . \\ \curvearrowright \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} &= \sum_{w \in N(z)} \frac{1}{\deg(z)} \frac{u_{xy}(w)}{\deg(w)} \end{aligned}$$

Nach dem Kirchhoffschen Gesetz gilt ($v(z)$ sei das im Knoten z anliegende Potential, mit den Randwerten $v(y) = 0$ und $v(x) = \frac{u_{xy}(x)}{\deg(x)}$, und $i_{zw} = (v(z) - v(w))C_{zw}$ die Stromstärke von z nach w):

$$\begin{aligned}
 i_z &= \sum_{w \in N(z)} i_{zw} = 0, \forall z \in V \setminus \{x, y\} \\
 &\iff \sum_{w \in N(z)} (v(z) - v(w))C_{zw} = 0 \\
 &\iff v(z) \sum_{w \in N(z)} C_{zw} = \sum_{w \in N(z)} C_{zw}v(w) \\
 &\iff v(z) = \frac{1}{\deg(z)} \sum_{w \in N(z)} v(w) \tag{2.4.1} \\
 \curvearrowright v_{zy} &= \sum_{w \in N(z)} \frac{1}{\deg(z)} v_{wy}, z \in V \setminus \{x, y\}
 \end{aligned}$$

v_{zy} ist dabei die Spannung zwischen z und y (d.h. $v_{zy} = v(z) - v(y)$). Wir erhalten $v_{yy} = 0$ und $v_{xy} = \frac{u_{xy}(x)}{\deg(x)}$. Wir beobachten, dass v_{zy} und $u_{xy}(z)/\deg(z)$ harmonische Funktionen auf V sind und die gleichen Randwerte besitzen. Es folgt (siehe Eigenschaften harmonischer Funktionen in [11], Seite 1)

$$v_{zy} = \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)}, \forall z \in V. \tag{2.4.2}$$

Der Effektivwiderstand R_{xy}^{eff} ist per Definition gleich der Spannung v_{xy} , wenn ein Einheitsstrom i das Netzwerk über den Knoten x betritt und über den Knoten y verlässt. Denn dann gilt $R_{xy}^{eff} := \frac{v(x)}{i_x} = \frac{v(x)}{1} = v_{xy} = \frac{u_{xy}(x)}{\deg(x)}$, da $v(y) = 0$. Könnten wir zeigen, dass mit den festgelegten Randwerten der Potentiale ein Einheitsstrom durch das Netzwerk fließt, hätten wir das Theorem gezeigt. Wir wissen

$$\begin{aligned}
 i_{wz} &= (v_{wy} - v_{zy})/1 \\
 &= \frac{u_{xy}(w)}{\deg(w)} - \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)}.
 \end{aligned}$$

Damit ist i_{wz} gleich der Nettokantenüberquerungsanzahl von w nach z , einer zufälligen Irrfahrt, die in x startet und solange dauert, bis sie in y endet. Da die Irrfahrt in x startet, muss der Prozess den Knoten x stets einmal mehr verlassen, bevor er ihn wieder über einen der Nachbarknoten von x besuchen kann, um letztlich in y zu landen. Wir erhalten mit der hergeleiteten Interpretation des Stromes

$$\sum_w i_{xw} = 1 = \sum_z i_{zy}.$$

□

Theorem 10 Der Effektivwiderstand R_{xy}^{eff} , ist gleich der erwarteten Anzahl von Über-

querungen einer beliebigen Kante $\{w, z\}$ $w \in V \setminus \{x, y\}$ von w nach z , wenn eine Irrfahrt in x startet und solange dauert bis sie den Knoten y erreicht und wieder zu Knoten x zurückkehrt. (siehe [10], Seite 103)

Beweis: Sei nun $u_{xy}^{\leftrightarrow}(w)$ die erwartete Anzahl von Besuchen des Knotens $w \in V$, wenn eine Irrfahrt in x startet und so lange dauert bis sie y erreicht und wieder zu x zurückkehrt. Dann folgt unmittelbar

$$u_{xy}^{\leftrightarrow}(w) = u_{xy}(w) + u_{yx}(w).$$

Mit Formel 2.4.2 und der Tatsache, dass bei der Größe $u_{xy}(w)$ im entsprechenden elektrischen Netzwerk ein Einheitsstrom über Knoten x einfließt und über Knoten y verlässt und bei der Größe $u_{yx}(w)$ ein Einheitsstrom in genau umgekehrter Richtung eingespeist wird. So ändern sich im zweiten Falle einfach die Vorzeichen der berechneten Ströme, des ersten Falles. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_{xy}^{\leftrightarrow}(w) &= u_{xy}(w) + u_{yx}(w) \\ &= v_{wy} \text{deg}(w) + v_{wx} \text{deg}(w) \text{ (bezüglich Strom : } x \mapsto y \text{ und } y \mapsto x) \\ &= v_{wy} \text{deg}(w) + (-v_{wx} \text{deg}(w)) \text{ (bezüglich Strom : } x \mapsto y \text{ und } x \mapsto y) \\ &= v_{xy} \text{deg}(w) \\ &= R_{xy}^{\text{eff}} \text{deg}(w). \end{aligned}$$

$$\leadsto \frac{u_{xy}^{\leftrightarrow}(w)}{\text{deg}(w)} = R_{xy}^{\text{eff}}$$

□

Nun wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Pendelzeit k_{ij} zweier Knoten $i, j \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ und dem Effektivwiderstand R_{ij}^{eff} des zugeordneten elektrischen Netzwerkes herstellen.

Korollar 1 Für die Pendelzeit k_{ij} gilt ($|E| = m$):

$$k_{ij} = m_{ij} + m_{ji} = 2mR_{ij}^{\text{eff}} \quad i, j \in V \text{ mit } i \neq j \quad (2.4.3)$$

(siehe [10], Seite 104)

Beweis: Wir starten eine Irrfahrt im Knoten $i \in V$. Betrachten wir $\sum_w u_{ij}(w)$, so liefert diese Summe die mittlere Anzahl von Schritten, die wir auf dem Graphen verbringen, bevor wir in j landen und damit m_{ij} . Analoges gilt, wenn wir ausgehend von j nach i

wandern. Es folgt

$$\begin{aligned}
 k_{ij} &= m_{ij} + m_{ji} \\
 &= \sum_w u_{ij}(w) + \sum_w u_{ji}(w) \\
 &= \sum_w u_{ij}^{\leftrightarrow}(w) \\
 &= R_{ij}^{eff} \sum_w \deg(w) \\
 &= R_{ij}^{eff} 2m .
 \end{aligned}$$

□

Aus dem sogenannten Austauschgesetz der Elektrotechnik (siehe [10], Seite 105), erhalten wir einen entsprechenden Korollar für zufällige Irrfahrten auf Graphen.

Korollar 2 Die erwartete Anzahl von Überquerungen einer Kante $\{w, z\}$ $w \in V \setminus \{x, y\}$ von w nach z , einer Irrfahrt, die in x startet und solange dauert bis sie in y endet, ist gleich der erwarteten Anzahl von Überquerungen einer Kante $\{x, q\}$ von x nach q , einer Irrfahrt, die in w startet und solange dauert bis sie in y endet. D.h. $u_{xy}(w)/\deg(w) = u_{wy}(x)/\deg(x)$. (siehe [10], Seite 105)

Theorem 11 Gegeben sei ein elektrisches Netzwerk $G = (V, E, C)$, dann gilt

$$\sum_{\{x,y\} \in E} R_{xy}^{eff} = n - 1 .$$

(siehe [10], Seite 104)

Beweis: Nach Korollar 2 ist

$$u_{xy}(z)/\deg(z) = u_{zy}(x)/\deg(x) .$$

Die linke Seite der Gleichung bezieht sich auf eine zufällige Irrfahrt, die von x nach y läuft, wobei die rechte Seite der Gleichung eine von z nach y suggeriert. Summation

über alle Nachbarschaftsknoten von y ergibt

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in N(y)} \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} &= \sum_{x \in N(y)} \frac{u_{zy}(x)}{\deg(x)} \\
 &= \sum_{x \in N(y)} v_{xy} \\
 &= \sum_{x \in N(y)} \frac{v(x) - v(y)}{1} \\
 &= \sum_{x \in N(y)} i_{xy} \\
 &= 1, z \neq y.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{y \in V \setminus \{z\}} \sum_{x \in N(y)} \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} &= \sum_{y \in V \setminus \{z\}} 1 = n - 1, \\
 \sum_{y \in V \setminus \{z\}} \sum_{x \in N(y)} \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} &= \sum_{y \in V} \sum_{x \in N(y)} \frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} \\
 &\quad (da \text{ für } y = z: \frac{u_{xz}(z)}{\deg(z)} = \frac{0}{\deg(z)} = 0) \\
 &= \sum_{\{x,y\} \in E} \left(\frac{u_{xy}(z)}{\deg(z)} + \frac{u_{yx}(z)}{\deg(z)} \right) \\
 &= \sum_{\{x,y\} \in E} \frac{u_{xy}^{\leftrightarrow}(z)}{\deg(z)} \\
 &= \sum_{\{x,y\} \in E} R_{xy}^{eff} = n - 1.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung Mit Korollar 1 und Theorem 11 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2m} \sum_{\{x,y\} \in E} 2m R_{xy}^{eff} &= n - 1 \\
 \curvearrowright \sum_{\{x,y\} \in E} k_{xy} &= 2m(n - 1).
 \end{aligned}$$

2.5 Mittlere Erstankunftszeit und erzeugende Funktionen

Die folgende Theorie stammt aus [5], Seite 14-20 und [17], Seite 8-20.

Wir betrachten die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$F(x) = \sum_{t=0}^{\infty} P^t x^t .$$

Dabei ist P die Übergangsmatrix des auf $G = (V, E)$ stattfindenden stochastischen Prozesses v_0, v_1, \dots . Der i, j 'te Eintrag $F_{ij}(x)$ der Matrix $F(x)$, ist die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(t)}$, d.h. $F_{ij}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}^{(t)} x^t$. $f_{ij}^{(t)}$ sei die Wahrscheinlichkeit, ausgehend von i, j erstmalig nach t Schritten zu erreichen. Dann gilt

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{s=0}^t f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(t-s)} .$$

$G_{ij}(x)$ sei die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten $f_{ij}^{(t)}$. Mit dem Cauchyprodukt erhalten wir

$$F_{ij}(x) = G_{ij}(x) F_{jj}(x) .$$

Nach Spektraldekomposition der Matrix P (berücksichtige Ordnung der Eigenwerte entsprechend Abschnitt 2.3), Beachtung von Gleichung 2.3.2 und den Substitutionen $z(k) = D^{1/2} v(k)$ und $a(k) = D^{-1/2} v(k)$, ist (für die i 'te Komponente des k 'ten Eigenvektors schreiben wir $v(k)_i$, anstatt $(v(k))_i$)

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(t)} &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^t v(k)_i v(k)_j \sqrt{\frac{\deg(j)}{\deg(i)}} \\ &= (w)_j + \sum_{k=2}^n \lambda_k^t z(k)_i a(k)_j \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) &= \sum_{t=0}^{\infty} ((w)_j + \sum_{k=2}^n \lambda_k^t z(k)_i a(k)_j) x^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} ((w)_j x^t + \sum_{k=2}^n (\lambda_k x)^t z(k)_i a(k)_j) \\ &= \frac{(w)_j}{1-x} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=2}^n (\lambda_k x)^t z(k)_i a(k)_j \\ &= \frac{(w)_j}{1-x} + \sum_{k=2}^n z(k)_i a(k)_j \sum_{t=0}^{\infty} (\lambda_k x)^t \\ &= \frac{(w)_j}{1-x} + \sum_{k=2}^n z(k)_i a(k)_j \frac{1}{1-\lambda_k x} \text{ mit } |x| < 1. \end{aligned}$$

Für $G_{ij}(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 G_{ij}(x) &= \frac{F_{ij}(x)}{F_{jj}(x)} \\
 &= \frac{\frac{(w)_j}{1-x} + \sum_{k=2}^n z(k)_i a(k)_j \frac{1}{1-\lambda_k x}}{\frac{(w)_j}{1-x} + \sum_{k=2}^n z(k)_j a(k)_j \frac{1}{1-\lambda_k x}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1-x}{(w)_j} \sum_{k=2}^n z(k)_i a(k)_j \frac{1}{1-\lambda_k x}}{1 + \frac{1-x}{(w)_j} \sum_{k=2}^n z(k)_j a(k)_j \frac{1}{1-\lambda_k x}} \text{ mit } -1 < x \leq 1.
 \end{aligned}$$

Zwischen der mittleren Erstankunftszeit m_{ij} und $G_{ij}(x)$ besteht der Zusammenhang, dass

$$m_{ij} = \sum_{t=0}^{\infty} t f_{ij}^{(t)} = G_{ij}(x)'|_{x=1}.$$

Wir erhalten mit $a(k)_{ij} = z(k)_i a(k)_j / (w)_j$

$$\begin{aligned}
 G_{ij}(x)' &= \left(\frac{1 + \sum_{k=2}^n a(k)_{ij} \frac{1-x}{1-\lambda_k x}}{1 + \sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{1-x}{1-\lambda_k x}} \right)' \\
 &= \left(\left[\sum_{k=2}^n a(k)_{ij} \frac{-1(1-\lambda_k x) + (1-x)\lambda_k}{(1-\lambda_k x)^2} \right] \left[1 + \sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{1-x}{1-\lambda_k x} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[\sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{-1(1-\lambda_k x) + (1-x)\lambda_k}{1-\lambda_k x} \right] \left[1 + \sum_{k=2}^n a(k)_{ij} \frac{1-x}{1-\lambda_k x} \right] \right) \\
 &\quad / \left[1 + \sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{1-x}{1-\lambda_k x} \right]^2 \\
 G_{ij}(1)' &= \frac{\left[\sum_{k=2}^n a(k)_{ij} \frac{-1(1-\lambda_k)}{(1-\lambda_k)^2} \right] 1 - \left[\sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{-1(1-\lambda_k)}{(1-\lambda_k)^2} \right] 1}{1} \\
 &= \sum_{k=2}^n a(k)_{jj} \frac{1}{(1-\lambda_k)} - \sum_{k=2}^n a(k)_{ij} \frac{1}{(1-\lambda_k)} \\
 &= \sum_{k=2}^n (a(k)_{jj} - a(k)_{ij}) \frac{1}{(1-\lambda_k)}.
 \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned}
 G_{ij}(1)' &= m_{ij} \\
 &= 2m \sum_{k=2}^n \left(\frac{v(k)_j^2}{\deg(j)} - \frac{v(k)_i v(k)_j}{\sqrt{\deg(i)\deg(j)}} \right) \frac{1}{(1-\lambda_k)}. \quad (2.5.1)
 \end{aligned}$$

Bemerkung Mit Formel 2.5.1 erhalten wir für die Pendelzeit

$$k_{ij} = 2m \sum_{k=2}^n \left(\frac{v(k)_j}{\sqrt{\deg(j)}} - \frac{v(k)_i}{\sqrt{\deg(i)}} \right)^2 \frac{1}{(1 - \lambda_k)}.$$

Mittels spektraler Darstellung der Erstankunftszeit können wir nun das sogenannte “random target Lemma” beweisen.

Lemma 5 Für eine irreduzible Markov-Kette mit dem Zustandsraum S , der Übergangsmatrix P und dem eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektor w ($wP = w$), ist die Größe

$$\sum_{j \in S} m_{ij}(w)_j$$

unabhängig vom Anfangszustand $i \in S$. (siehe [5], Seite 17)

Beweis: Um die eben gewonnen Erkenntnisse anzuwenden, wollen wir dieses Lemma für den Spezialfall “zufällige Irrfahrten auf Graphen” beweisen. Mit dem Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{|S|} (x)_k (y)_k$, $x, y \in \mathbb{R}^{|S|}$ und der induzierten Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ gilt nach Gleichung 2.5.1

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} (w)_j m_{ij} &= \sum_{j \in S} \frac{\deg(j)}{2m} \left[2m \sum_{k=2}^n \left(\frac{v(k)_j^2}{\deg(j)} - \frac{v(k)_i v(k)_j}{\sqrt{\deg(i) \deg(j)}} \right) \frac{1}{(1 - \lambda_k)} \right] \\ &= \sum_{j \in S} \sum_{k=2}^n (v(k)_j^2 - \sqrt{\frac{\deg(j)}{\deg(i)}} v(k)_i v(k)_j) \frac{1}{(1 - \lambda_k)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1 - \lambda_k)} \left[\sum_{j \in S} v(k)_j^2 - \sqrt{\frac{1}{\deg(i)}} v(k)_i \sum_{j \in S} v(k)_j \sqrt{\deg(j)} \right] \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1 - \lambda_k)} \left[\|v(k)\|^2 - \sqrt{\frac{1}{\deg(i)}} v(k)_i \sqrt{2m} \sum_{j \in S} v(k)_j \sqrt{\frac{\deg(j)}{2m}} \right] \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1 - \lambda_k)} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{\deg(i)}} v(k)_i \sqrt{2m} \langle v(k), v(1) \rangle \right] \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1 - \lambda_k)} [1 - 0] \text{ (beachte Orthonormiertheit)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1 - \lambda_k)}. \end{aligned}$$

□

Wir können das “random target Lemma” folgendermaßen interpretieren. Wir wählen aus dem Zustandsraum S einen zufälligen Zielknoten entsprechend der Verteilung des eindeutigen, fixen, positiven Wahrscheinlichkeitsvektors w ($wP = w$) der Matrix P und

fragen, wie lang es im Mittel dauert, um ausgehend von einem konkreten Startknoten $i \in S$, im zufälligen Zielknoten zu landen. Nach Lemma 5 ist diese Größe völlig unabhängig vom Anfangszustand $i \in S$. Weiterhin gilt die Abschätzung:

Theorem 12 Wählen wir $i \in S$ entsprechend der Verteilung w der Zustandsmenge S . Dann gilt für festes $j \in S$

$$\sum_{i \in S} (w)_i m_{ij} \geq \frac{2m}{\deg(j)} \left(1 - \frac{\deg(j)}{2m}\right)^2.$$

(siehe [5], Seite 19)

Beweis: Man betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} (w)_i m_{ij} &= \sum_{i \in S} \frac{\deg(i)}{2m} \left[2m \sum_{k=2}^n \left(\frac{v(k)_j^2}{\deg(j)} - \frac{v(k)_i v(k)_j}{\sqrt{\deg(i)\deg(j)}} \right) \frac{1}{(1-\lambda_k)} \right] \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{k=2}^n \left(\frac{\deg(i)}{\deg(j)} v(k)_j^2 - \sqrt{\frac{\deg(i)}{\deg(j)}} v(k)_i v(k)_j \right) \frac{1}{(1-\lambda_k)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} \left(\frac{v(k)_j^2}{\deg(j)} \sum_{i \in S} \deg(i) - \sqrt{\frac{1}{\deg(j)}} v(k)_j \sqrt{2m} \sum_{i \in S} v(k)_i \sqrt{\frac{\deg(i)}{2m}} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} \left(\frac{v(k)_j^2}{\deg(j)} 2m \right) \\ &= \frac{2m}{\deg(j)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} v(k)_j^2 \end{aligned}$$

Nutzen wir nun die Ungleichung des arithmetischen- und harmonischen Mittels \mathcal{H} mit den Gewichten $v(k)_j^2$, wir erhalten

$$\mathring{A} = \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} v(k)_j^2}{\sum_{k=2}^n v(k)_j^2} \geq \frac{\sum_{k=2}^n v(k)_j^2}{\sum_{k=2}^n (1-\lambda_k) v(k)_j^2} = \mathcal{H}.$$

Weiterhin gilt (beachte $v(1)_j^2 = (w)_j$ siehe Gleichung 2.3.1, Matrix N siehe Abschnitt 2.3, zudem ist die Orthonormiertheit der Eigenvektoren $v(i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ zu beachten):

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n v(k)_j^2 &= \sum_{k=1}^n v(k)_j^2 - v(1)_j^2 = 1 - (w)_j, \\ \sum_{k=2}^n (1-\lambda_k) v(k)_j^2 &= \sum_{k=1}^n (1-\lambda_k) v(k)_j^2 = 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k v(k)_j^2 = 1 - (N)_{jj} = 1 \end{aligned}$$

$(N)_{jj} = 0$ ist dem Fakt geschuldet, dass $P = D^{1/2} N D^{-1/2}$. Da $(P)_{jj} = 0 \Rightarrow (N)_{jj} = 0$.

Wir erhalten weiterhin

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} v^{(k)}_j^2 \geq \frac{(1-(w)_j)^2}{1}$$

und schlussendlich

$$\sum_{i \in S} w(i) m_{ij} = \frac{2m}{\deg(j)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(1-\lambda_k)} v^{(k)}_j^2 \geq \frac{2m}{\deg(j)} (1-w(j))^2.$$

□

3 Überdeckungszeit

3.1 Vorstellung der Problematik

Wir betrachten eine Irrfahrt auf einem Graphen $G = (V, E)$, wie in Abschnitt 1.1 vorgestellt. Sei c_{in} die mittlere Anzahl von Schritten, um ausgehend von Knoten i , alle n Knoten des Graphen $G = (V, E)$ zu besuchen. Wir vereinbaren, dass der Prozess endet, sobald alle Knoten besucht wurden. Weiter von Interesse ist die sogenannte partielle Überdeckungszeit c_{ik} ($k < n$) welche angibt, wie lang es im Mittel dauert, um ausgehend von Knoten i , k unterschiedliche Knoten zu besuchen (der Startknoten wird dabei mit gezählt). Es ist mit einem angepassten Gleichungssystem möglich das Problem der Bestimmung von c_{in} zu lösen, nur erfordert dies einen hohen Rechenaufwand, wie wir im nachfolgenden Beispiel sehen werden.

Beispiel. Wir starten eine Irrfahrt auf dem in Abbildung 3.1.1 dargestellten Graphen, Startknoten ist dabei Knoten 1.

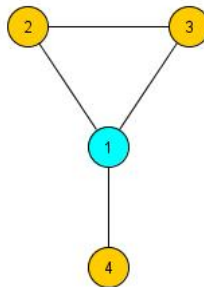


Abbildung 3.1.1: Irrfahrt auf einem speziellen Graphen

Wir interessieren uns für die partielle Überdeckungszeit c_{13} . Nach dem ersten Schritt befindet sich das Teilchen in einem der Nachbarknoten 2,3 oder 4. D.h. wir müssen drei Fallunterscheidungen betrachten.

1. Das Teilchen bewegt sich zu Knoten 2, dann sei a die mittlere Anzahl von Schritten die benötigt werden, um ausgehend von 2, einen weiteren noch nicht besuchten Knoten zu erreichen.
2. Das Teilchen bewegt sich zu Knoten 3, auf Grund der Symmetrie des Graphen ist die mittlere Anzahl von Schritten die benötigt werden, um ausgehend von 3, einen weiteren noch nicht besuchten Knoten zu erreichen, wiederum a .
3. Das Teilchen bewegt sich zu Knoten 4, in diesem Fall sei b die mittlere Anzahl von Schritten die benötigt werden, um ausgehend von 4, einen weiteren noch nicht besuchten Knoten zu erreichen.

Verknüpfen wir diese drei Fälle erhalten wir

$$c_{13} = 1 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = 1 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b.$$

Die 1 in der Gleichung beschreibt den Schritt des Teilchens zu einem Nachbarknoten von 1 ($1/3$ entspricht der Übergangswahrscheinlichkeit). Um a und b zu berechnen sind weitere Überlegungen notwendig. In Abbildung 3.1.2 sind die möglichen Bewegungen des Teilchens nach dem ersten Schritt in a', b' aufgeführt (die Bewegung zu Knoten 3 ist spiegelsymmetrisch zu a').

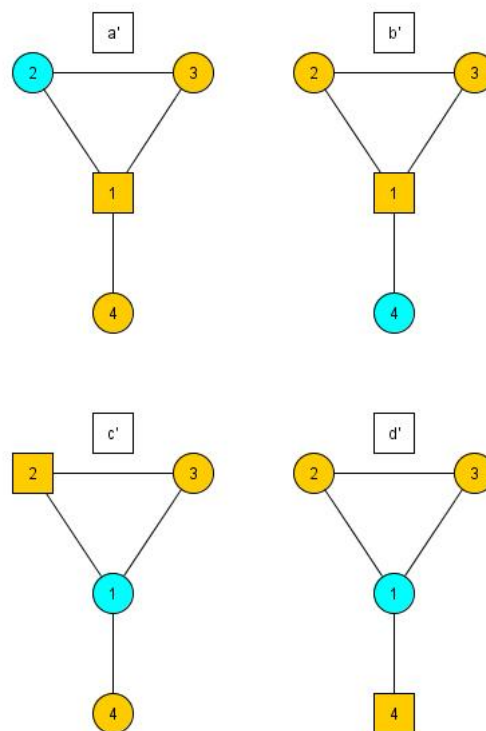


Abbildung 3.1.2: Fallunterscheidungen

Ein türkiser Knoten stellt die derzeitige Lage des Teilchens und ein quadratischer- einen schon besuchten Knoten dar. Ausgehend von a', b' können sich im nächsten Zeitschritt die Realisierungen c', d' ergeben. Wir erhalten ein System von Gleichungen, mit:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}c \\ b &= 1 + d \\ c &= 1 + \frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}a \\ d &= 1 + \frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}b \end{aligned}$$

Es soll nur die Gleichung für die Unbekannte a erklärt werden, die übrigen Gleichungen sind einfach zu abstrahieren. Ausgehend von Knoten 2 bewegen wir uns mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ wieder zu Knoten 1, dann befinden wir uns in c' und benötigen, ausgehend von 1, im Mittel c Schritte, um einen weiteren noch nicht besuchten Knoten zu erreichen. Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bewegen wir uns zu Knoten 3, dann ist aber nach Vereinbarung der Prozess zu Ende, wodurch die 0 entsteht. Die 1 in der Gleichung beschreibt wieder den Übergangsschritt zu einem Nachbarknoten von 2. Nach Berechnung von a, b erhalten wir $c_{13} = 16/5$.

3.2 Überdeckungszeit spezieller Graphen

Die nachfolgenden Herleitungen für die Überdeckungszeit stammen aus: [13]; [14], Seite 146-155; [4], Seite 47-52.

3.2.1 Vollständiger Graph K_n

Auf Grund der Symmetrie des vollständigen Graphen mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$ spielt es keine Rolle wo die Irrfahrt startet. Für c_{1n} gilt

$$c_{1n} = (n-1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right). \quad (3.2.1)$$

Diese Gleichung kann aus der Lösung eines verwandten Problems hergeleitet werden. Wir betrachten das sogenannte Gutschein-Sammel-Problem (coupon collectors problem). In einer Lebensmittelverpackung befindet sich einer, von r unterschiedlichen Preisen. Die Preise seien gleich verteilt, sodass jeder Preis mit gleicher Wahrscheinlichkeit erhalten werden kann. Eine Person kauft solange Lebensmittelverpackungen bis sie alle Preise erhalten hat. Sei N die zufällige Anzahl von gekauften Lebensmittelverpackungen, bis alle Preise erhalten wurden. Von Interesse ist nun der Erwartungswert von N . Sei Y_i die zufällige Anzahl von gekauften Verpackungen, um die bisherige Kollektion von $i-1$ unterschiedlichen Preisen, auf i zu erhöhen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} N &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r, \\ E(N) &= E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_r) \end{aligned}$$

Besitzt die Person $i-1$ unterschiedliche Preise, so verbleiben noch $r-i+1$ zu gewinnende Preise. Ist p_i die Wahrscheinlichkeit einen neuen Preis zu gewinnen, dann gilt

$$P(Y_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i, k = 1, 2, \dots$$

Damit ist die Zufallsgröße Y_i geometrisch verteilt. Da noch $r - i + 1$ unterschiedliche Preise zu gewinnen sind, ist $p_i = (r - i + 1)/r$.

$$\begin{aligned}
 E(Y_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p_i)^{k-1} p_i \\
 &= p_i \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p_i)^{k-1} \\
 &= p_i \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=1-p_i} \\
 &= \frac{p_i}{p_i^2} \\
 &= \frac{1}{p_i} \\
 &= \frac{r}{r-i+1}
 \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$E(N) = r \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \dots + 1 \right).$$

Die Lösung dieses Problems lässt unmittelbar auf die Lösung unseres Ausgangsproblems schließen. Beachten wir zusätzlich, dass wir die Irrfahrt in einem konkreten Knoten starten, erhalten wir Gleichung 3.2.1.

3.2.2 Weg P_n

Wir nummerieren die Knoten des Weges mit $V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Aus Abschnitt 2.1.3.1 ist uns bekannt, dass $r_0 = r_{n-1} = 1/(w)_0 = 2m/\deg(0) = 2(n-1)$ ist ($r_0 \triangleq$ mittlere Erstrückkehrzeit zu Knoten 0). Befinden wir uns im Knoten 0, so erfolgt im nächsten Zeitschritt eine Bewegung zu Knoten 1 mit Wahrscheinlichkeit 1 (analog für Knoten $n-1$). Wir erhalten $r_{n-1} = 1 + m_{(n-2)(n-1)}$ ($m_{(n-2)(n-1)} \triangleq$ mittlere Anz. von Schritten, um ausgehend von Knoten $n-2$, Knoten $n-1$ erstmalig zu erreichen). Folglich ist $m_{(n-2)(n-1)} = 2(n-1) - 1$. Allgemein erhalten wir $m_{(r-1)r} = 2r - 1$ $0 < r \leq n-1$, da in diesem Falle nur eine Irrfahrt auf P_{r+1} betrachtet wird. Wollen wir nun m_{ij} $i < j$ berechnen, machen wir folgende Beobachtung. Um Knoten j näher zu kommen müssen wir von Knoten i zu Knoten $i+1$ wandern, dies dauert im Mittel $m_{i(i+1)}$ Schritte. Von Knoten $i+1$ zu Knoten $i+2$ etc.. Darum gilt:

$$m_{ij} = \sum_{r=i+1}^j m_{(r-1)r} = \sum_{r=i+1}^j 2r - 1 = j^2 - i^2 \quad (3.2.2)$$

Bemerkung Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=i+1}^j 2r-1 &= 2 \sum_{r=i+1}^j r - \sum_{r=i+1}^j 1 \\
 &= 2 \left(\sum_{r=1}^j r - \sum_{r=1}^i r \right) - (j-i) \\
 &= 2 \left(\frac{j(j+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) - (j-i) \\
 &= j^2 - i^2
 \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir P_{n+1} . Sei a_r die mittlere Anzahl von Schritten, um ausgehend von Knoten r den Knoten 0, oder n zu erreichen. Dann gilt:

$$a_r = \begin{cases} 0 & \text{für } r = 0 \\ 1 + \frac{1}{2}a_{r-1} + \frac{1}{2}a_{r+1} & \text{für } 0 < r < n-1 \\ 0 & \text{für } r = n \end{cases}$$

Eine Lösung dieses Problems ist $a_r = r(n-r)$. Die Eindeutigkeit dieser Lösung kann mittels Eigenschaften harmonischer Funktionen gezeigt werden (siehe [4], Seite 49). Um den Graphen P_{n+1} , ausgehend von Knoten r , zu überdecken ist es notwendig, zuerst einen der Randknoten 0, oder n zu besuchen und danach zum entsprechend anderen Ende des Graphen zu wandern. Unter Beachtung der Symmetrie des Graphen, erhalten wir

$$c_{r(n+1)} = a_r + m_{0n} = r(n-r) + n^2. \quad (3.2.3)$$

3.2.3 Kreis C_n

Die Knoten des Kreises seien der Reihe um nummeriert mit $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Wir interessieren uns für die Größe m_{r0} ($r \neq 0$). Sofort wird klar, dass wir ausgehend von r auf 2 Wegen zu 0 gelangen können. Nämlich über den Wegen $(r, r-1, \dots, 0)$ und $(r, r+1, \dots, 0)$. Das Problem der Bestimmung von m_{r0} bezüglich des Graphen C_n , ist äquivalent dem Problem der Berechnung von a_r (wie in Abschnitt 3.2.2 vorgestellt) bezüglich des Graphen P_{n+1} . Wir spalten den Kreis im Knoten 0, der resultierende Graph ist ein Weg der Länge n , mit den Randknoten 0 und 0. Wir erhalten $m_{r0} = a_r = r(n-r)$. Sei $T(k)$ die mittlere Anzahl von Schritten, um ausgehend von einem beliebigen Startknoten $r \in V$, k Knoten des Graphen C_n zu besuchen. Dann gilt $T(1) = 0$. Nach dem ersten Schritt wird mit Wahrscheinlichkeit 1 ein Nachbarknoten von r besucht. Es folgt $T(2) - T(1) = 1$, wir können c_{rn} folgendermaßen zerlegen

$$c_{rn} = T(n) = (T(n) - T(n-1)) + (T(n-1) - T(n-2)) + \dots + (T(2) - T(1)) + T(1).$$

$T(i) - T(i-1)$ ist dabei die mittlere Anzahl von Schritten, um von $i-1$ auf i unterschiedlich besuchte Knoten zu springen. Angenommen wir haben eben den k 'ten neuen Knoten besucht ($k < n$), dann können wir einen Weg von schon besuchten Knoten konstruieren. Auf Grund der Symmetrie des Graphen ist nur die Anzahl von schon besuchten Knoten wichtig, wir schreiben $(k, k-1, k-2, \dots, 1)$, die übrigen noch nicht besuchten Knoten lassen sich ebenfalls durch einen Weg darstellen $(k+1, k+2, \dots, n-1, 0)$. Nach einer gewissen Zeit wird entweder Knoten $k+1$, oder Knoten 0 besucht. Folglich ist $T(k+1) - T(k)$ gleich a_k bezüglich dem Graphen P_{k+2} . Wir erhalten $a_k = k(k+1-k) = k$ und das Resultat

$$c_{rn} = \sum_{k=1}^{n-1} T(k+1) - T(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3.3 Schranken für die Überdeckungszeit

3.3.1 Matthews Grenze

Es ist nicht überraschend, dass zwischen der Überdeckungszeit und der mittleren Erstankunftszeit eine gewisse Abhängigkeit besteht. Je länger es dauert um von einem beliebigen Zustand zu einem anderen zu gelangen, umso länger wird es dauern, bis wir alle Zustände besucht haben. Das Theorem von Matthews ist eine Verallgemeinerung des "coupon collectors problem", welches bei der Überdeckungszeit des vollständigen Graphen vorgestellt wurde.

Theorem 13 (Matthews) Sei (X_t) eine irreduzible, endliche Markov-Kette mit n Zuständen. Dann gilt für einen beliebigen Anfangszustand x ,

$$c_{xn} \leq (\max_{a,b} m_{ab}) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

(siehe [3], Seite 143; [16], Seite 5)

Beweis: Sei $Z = \{1, 2, \dots, n\}$ der Zustandsraum der Markov-Kette und σ eine beliebige, gleich verteilte Permutation der Zustände aus Z ($\sigma \in S_n$). Die Permutation $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ wird dabei unabhängig vom stochastischen Prozess gewählt. Weiterhin sei T_k die zufällige Anzahl von Schritten, bis alle Zustände aus $\sigma_k = (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ $k \leq n$ besucht wurden und $L_k = X_{T_k}$, d.h. L_k ist der letzte Zustand aus σ_k der zum Zeitpunkt T_k besucht wird. Sei $E_x(T_1 | \sigma(1) = s_1)$ der bedingte Erwartungswert der Zufallsgröße T_1 , wobei im Zustand x gestartet wird. Ist $\sigma(1) = x$ erhalten wir für $T_1 = 0$. Allgemein gilt

$$E_x(T_1 | \sigma(1) = s_1) = m_{xs_1} \leq \max_{a,b} m_{ab}.$$

Wir betrachten den Term $T_2 - T_1$ von $\sigma_2 = (\sigma(1), \sigma(2))$, dabei können zwei mögliche

Fälle eintreten.

1. Der Prozess besucht zuerst $\sigma(1)$ und danach $\sigma(2)$, dann entspricht $T_2 - T_1 = (m_{x\sigma(1)} + m_{\sigma(1)\sigma(2)}) - (m_{x\sigma(1)}) = m_{\sigma(1)\sigma(2)}$ und L_2 wäre in diesem Falle gleich $\sigma(2)$.

2. Der Prozess besucht zuerst $\sigma(2)$ und danach $\sigma(1)$, dann erhalten wir für $T_2 - T_1 = (m_{x\sigma(2)} + m_{\sigma(2)\sigma(1)}) - (m_{x\sigma(2)} + m_{\sigma(2)\sigma(1)}) = 0$ und $L_2 = \sigma(1)$.

Nun betrachten wir den ersten Fall etwas näher und definieren für zwei disjunkte Zustände $r, s \in S$ das Ereignis

$$A_2(r, s) = \{\sigma(1) = r, \sigma(2) = s = L_2\}$$

und erhalten

$$E_x(T_2 - T_1 | A_2(r, s)) = m_{rs} \leq \max_{a,b} m_{ab}.$$

Folglich ist $A_2 = \bigcup_{r \neq s} A_2(r, s)$ das Ereignis, dass $\sigma(2)$ nach $\sigma(1)$ besucht wird, mit $L_2 = \sigma(2)$.

Korollar 3 Sei Y eine Zufallsgröße über einem Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Ereignis B setzt sich aus abzählbar vielen, disjunkten Ereignissen B_j zusammen ($B = \bigcup_j B_j$). Aus $E(Y | B_j) \leq M$ folgt stets $E(Y | B) \leq M$. (siehe [16], Seite 5)

Mit Korollar 3 erhalten wir

$$E_x(T_2 - T_1 | A_2) \leq \max_{a,b} m_{ab}.$$

Bezeichnet A_2^c das Ereignis, dass $\sigma(2)$ vor $\sigma(1)$ besucht wird, folgt

$$E_x(T_2 - T_1 | A_2^c) = 0.$$

Da die Permutation unabhängig von der Trajektorie des stochastischen Prozesses gewählt wurde, ist es demnach gleich wahrscheinlich, dass $\sigma(2)$ vor $\sigma(1)$, oder nach $\sigma(1)$ in der Permutation σ auftaucht (d.h. $P_x(A_2) = \frac{1}{2}$, wobei in x gestartet wird). Mittels Definition des bedingten Erwartungswertes erhalten wir

$$\begin{aligned} E_x(T_2 - T_1) &= P_x(A_2) E_x(T_2 - T_1 | A_2) + P_x(A_2^c) E_x(T_2 - T_1 | A_2^c) \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{a,b} m_{ab}. \end{aligned}$$

Wir können $T_k - T_{k-1}$ $3 \leq k \leq n$ in gleicher Weise abschätzen. Dabei betrachten wir die

Fälle $\sigma(k) = L_k$ oder $\sigma(k) \neq L_k$. Für disjunkte Zustände $r, s \in S$ definieren wir

$$A_k(r, s) = \{\sigma(k-1) = r = L_{k-1}, \sigma(k) = s = L_k\}.$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E_x(T_k - T_{k-1} | A_k(r, s)) = m_{rs} \leq \max_{a,b} m_{ab}$$

und mit $A_k = \bigcup_{r \neq s} A_k(r, s)$ (d.h. $\sigma(k)$ wird als letzter Zustand in σ_k besucht) erhalten wir

$$E_x(T_k - T_{k-1} | A_k) \leq \max_{a,b} m_{ab}.$$

Während mit analoger Definition von A_k^c wiederum gilt:

$$E_x(T_k - T_{k-1} | A_k^c) = 0$$

Wie im Falle $k = 2$, ist es in σ_k für jeden Zustand gleich wahrscheinlich als letzter Zustand $\sigma(k)$ aufzutauchen (d.h. $P_x(A_k) = \frac{1}{k}$, wobei in x gestartet wird). Es resultiert

$$\begin{aligned} E_x(T_k - T_{k-1}) &= P_x(A_k) E_x(T_k - T_{k-1} | A_k) + P_x(A_k^c) E_x(T_k - T_{k-1} | A_k^c) \\ &\leq \frac{1}{k} \max_{a,b} m_{ab}. \end{aligned}$$

Beachten wir die Definition der Zufallsgröße T_n , erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned} c_{xn} &= E_x(T_n) \\ &= E_x(T_1) + E_x(T_2 - T_1) + \dots + E_x(T_n - T_{n-1}) \\ &\leq \max_{a,b} m_{ab} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

□

3.3.2 Eine weitere Grenze*

Lemma 6 *Gegeben sei ein ungerichteter, endlicher, zusammenhängender, schlichter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, dann gilt für die Überdeckungszeit c_{xn} $x \in V$*

$$c_{xn} \leq (n-1) \max_{y \in V} m_{xy}.$$

Beweis: $f_{xy}^{(k)}$ sei gleich der Wahrscheinlichkeit, wie in Abschnitt 2.5 eingeführt (Erstankunftswahrscheinlichkeit nach k Schritten). $A_x(k)$ sei das Ereignis, ausgehend von x , einer Überdeckung des Graphen nach k Schritten. $A_{xy}(k)$ sei das Ereignis, ausgehend von x , einer Überdeckung des Graphen nach k Schritten, wobei $y \in V \setminus \{x\}$ der zuletzt überdeckte Knoten sein soll. Dann folgt $A_x(k) = \bigcup_{y \in V \setminus \{x\}} A_{xy}(k)$. Für die Überdeckungszeit gilt dann:

$$\begin{aligned} c_{xn} &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A_x(k))k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\bigcup_{y \in V \setminus \{x\}} A_{xy}(k)\right)k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{y \in V \setminus \{x\}} P(A_{xy}(k)) \right] k \end{aligned}$$

Das Ereignis $A_{xy}(k)$ umfasst alle Trajektorien des stochastischen Prozesses, die nach k Schritten in y enden und zuvor alle anderen Knoten des Graphen besuchten. Das entsprechende Ereignis zur Wahrscheinlichkeit $f_{xy}^{(k)}$ umfasst ebenfalls diese Trajektorien und noch mehr. Aus dieser Tatsache folgt $f_{xy}^{(k)} \geq P(A_{xy}(k))$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} c_{xn} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{y \in V \setminus \{x\}} f_{xy}^{(k)} \right] k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{xy_1}^{(k)} k + \sum_{k=0}^{\infty} f_{xy_2}^{(k)} k + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} f_{xy_{n-1}}^{(k)} k \quad (\cup_{i=1}^{n-1} y_i = V \setminus \{x\}) \\ &= m_{xy_1} + m_{xy_2} + \dots + m_{xy_{n-1}} \\ &\leq (n-1) \max_{y \in V} m_{xy} \end{aligned}$$

□

3.4 Eine falsche Annahme*

In [4], Seite 53 wird folgende Annahme getroffen (siehe Abbildung 3.4.1).

5.2.1 Upper Bound: Spanning Tree and First Return Time

Let $G = (V, E)$ be an undirected, unweighted, simple, connected graph. Let $n = |V|$ and $m = |E|$. One way to upper bound the cover time of G is to choose some sequence of vertices $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ such that every vertex in V is in σ , and sum the hitting time from one vertex to another in the sequence; that is,

$$\text{COV}[G] \leq H[v_0, v_1] + H[v_1, v_2] + \dots + H[v_{r-1}, v_r].$$

Abbildung 3.4.1: Ausschnitt aus [4], Seite 53

In unserer Notation nimmt diese Ungleichung folgende Gestalt an:

$$\max_{u \in V} c_{un} \leq m_{v_0 v_1} + m_{v_1 v_2} + \dots + m_{v_{r-1} v_r}$$

Wir betrachten den Weggraphen P_{n+1} mit $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ und $\sigma = (0, 1, 2, \dots, n)$. Für die Überdeckungszeit (siehe 3.2.3)

$$c_{r(n+1)} = r(n-r) + n^2.$$

Sei n ungerade, dann folgt:

$$\begin{aligned} c_{\frac{n}{2}(n+1)} &= \frac{n}{2} \left(n - \frac{n}{2} \right) + n^2 = \frac{n^2}{4} + n^2 = \frac{5}{4}n^2 \\ c_{(\frac{n}{2} \pm k)(n+1)} &= \left(\frac{n}{2} \pm k \right) \left(n - \left(\frac{n}{2} \pm k \right) \right) + n^2 = \left(\frac{n}{2} \pm k \right) \left(\frac{n}{2} \mp k \right) + n^2 = \frac{5}{4}n^2 - k^2 \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ &\curvearrowright c_{\frac{n}{2}(n+1)} \geq c_{(\frac{n}{2} \pm k)(n+1)} \\ &\curvearrowright \max_{u \in V} c_{u(n+1)} = \frac{n^2}{4} + n^2 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$m_{01} + m_{12} + \dots + m_{(n-1)(n)} = m_{0n} = n^2 \text{ (siehe Gleichung 3.2.2).}$$

Es folgt

$$\max_{u \in V} c_{u(n+1)} = \frac{n^2}{4} + n^2 \geq n^2 = m_{01} + m_{12} + \dots + m_{(n-1)(n)} .$$

Womit ein Beispiel gefunden wäre, für welches die angenommene Ungleichung im Widerspruch steht.

4 Anwendung der Theorie

4.1 Simulated Annealing

Die folgende Vorstellung und Analyse des Algorithmus “Simulated Annealing“ stammt aus [18] und [19], Seite 55-67.

Es sei F die Menge aller zulässigen Lösungen eines kombinatorischen Optimierungsproblems. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

minimiere $f(x)$, so dass Prädikat $L(x)$ wahr ist.

Dabei ist das Prädikat $L(x)$ genau dann wahr, wenn x eine zulässige Lösung ist. Simulated Annealing führt eine zufällige Irrfahrt auf den Lösungen des vorgestellten Optimierungsproblems durch, um eine optimale Lösung zu bestimmen. Die Idee von Simulated Annealing stammt aus der Physik. Ein Stoff wird über seinen Schmelzpunkt hinaus erhitzt. Danach wird kontrolliert abgekühlt, um eine möglichst reine Kristallstruktur zu erhalten, diese wird dabei in einem globalen Energieminimum angenommen. Wird zu schnell abgekühlt, treten kleine Fehler in der Kristallgitterstruktur auf, diese fehlerhafte Struktur entspricht einem lokalen Energieminimum. Wir definieren die Abbildung $U : F \rightarrow 2^F$, d.h. jeder Lösung $x \in F$ wird eine Umgebung $U(x)$ benachbarter Lösungen mit:

- Für jede Lösung x gilt: $x \in U(x)$.
- Für alle Lösungen x, y gilt: $x \in U(y) \Leftrightarrow y \in U(x)$.
- Für $x \in U(y)$ gilt: $|U(x)| = |U(y)|$.

zugeordnet.

Der Algorithmus (Simulated Annealing):

1. Setze $x = x_0$ für eine beliebige Anfangslösung $x_0 \in F$ und wähle eine Anfangstemperatur T .
2. Wiederhole “hinreichend oft”:
 - 2.1 Wähle zufällig eine Nachbarlösung $y \in U(x)$.
 - 2.2 IF $f(y) \leq f(x)$ THEN $x = y$ ELSE
 Setze $x = y$ mit Wahrscheinlichkeit $e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T}}$.
 - 2.3 Wähle eine neue Temperatur T (entsprechend einem Abkühlschema).

Der Einfluss der Temperatur macht sich folgendermaßen bemerkbar:

- Ist die Temperatur hoch, so gilt: $e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T}} \approx 1 - \frac{f(y)-f(x)}{T}$,
da für kleine x : $e^{-x} \approx 1 - x$.
- strebt die Temperatur gegen Null, so $e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T}} \rightarrow 0$.

D.h. bei hohen Temperaturen sind Verschlechterungen durchaus wahrscheinlich. Damit durchläuft Simulated Annealing den Lösungsraum anfänglich rein zufällig. Mit $T \rightarrow 0$ sind Verschlechterungen sehr unwahrscheinlich. Im Folgenden wird eine Analyse des Algorithmus aus Sicht der Markov-Theorie geführt.

4.1.1 Analyse des Verfahrens

Ausgehend von einer beliebigen Lösung $x \in F$, führen wir folgende Wahrscheinlichkeiten ein:

- $G_T(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lösung y gewählt wird.
- $A_T(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass y akzeptiert wird.
- $P_T(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Simulated Annealing zur Lösung y wechselt.

Wird jede Nachbarlösung gleich wahrscheinlich gewählt, erhalten wir:

$$G_T(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|U(x)|} & \text{falls } y \in U(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$A_T(x, y)$ wird folgendermaßen festgelegt:

$$A_T(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(y) \leq f(x) \\ e^{-\frac{f(y)-f(x)}{T}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit Simulated Annealing, ausgehend von x , zur Lösung y wechselt, muss einerseits y aus $U(x)$ gewählt werden (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $G_T(x, y)$). Zudem muss y akzeptiert werden (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $A_T(x, y)$). Auf Grund der Unabhängigkeit beider Forderungen (Ereignisse) erhalten wir für $x \neq y$

$$P_T(x, y) = G_T(x, y)A_T(x, y) .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass wir in x verweilen ist dann

$$P_T(x, x) = 1 - \sum_{y \in U(x), y \neq x} P_T(x, y) .$$

Nun modellieren wir eine Markov-Kette. Der Zustandsraum S entspricht dabei den zulässigen Lösungen aus F . P_T sei die Übergangsmatrix mit den Einträgen $(P_T(x, y))_{x, y}$ bei fixierter Temperatur T . Wir starten nun eine Irrfahrt auf dem entsprechenden Graphen $G = (V, E, P_T)$ der Markov-Kette, gestartet wird dabei in einem beliebigen Knoten $x \in V$. Wir interessieren uns für die Grenzverteilung P_t (siehe Abschnitt 1.1). Durch die von uns getroffenen Vereinbarungen, kann die Irrfahrt durch eine reguläre Markov-Kette (siehe Abschnitt 2.1.1) beschrieben werden. Wäre die Kette reduzibel, läge ein Definitionsfehler der Nachbarschaft vor und sie ist aperiodisch, denn jede Lösung liegt auch in ihrer Nachbarschaft (Eigenschleifen). Aus Abschnitt 2.1.1 ist uns bekannt, dass ein eindeutiger, fixer, positiver Wahrscheinlichkeitsvektor w_T existiert, für den gilt $w_T P_T = w_T$. Wir stellen die Vermutung auf, dass

$$(w_T)_x = \frac{1}{N_T} e^{-\frac{f(x)}{T}}, N_T = \sum_{z \in F} e^{-\frac{f(z)}{T}}. \quad (4.1.1)$$

Stellt sich die Vermutung als wahr heraus, dann nimmt die Wahrscheinlichkeit, nach langer Zeit in einer Lösung mit geringem Zielfunktionswert zu landen, zu. Um die Vermutung zu zeigen, führen wir zuerst den Begriff der reversiblen Markov-Kette ein.

Definition Eine Markov-Kette heißt umkehrbar (reversibel), wenn es eine Verteilung q (q in Form eines Zeilenvektors) gibt, so dass für alle Zustände $x, y \in S$ gilt:

$$(q)_x p_{xy} = (q)_y p_{yx} \quad (4.1.2)$$

$(p_{xy} \triangleq \text{Übergangswahrsch. von } x \text{ nach } y)$

Wir summieren über alle Zustände y .

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} (q)_x p_{xy} &= \sum_{y \in S} (q)_y p_{yx} \\ \sum_{y \in S} (q)_x p_{xy} &= (q)_x \sum_{y \in S} p_{xy} = (q)_x 1 \\ &\curvearrowright (q)_x = \sum_{y \in S} (q)_y p_{yx} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Gleichung 4.1.3 in Vektorschreibweise ergibt

$$q = qP. \quad (4.1.4)$$

Für reguläre Markov-Ketten wissen wir, dass w der einzige Wahrscheinlichkeitsvektor ist, der 4.1.4 erfüllt. Demnach ist jede reguläre Markov-Kette reversibel und w ist genau

dann der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Übergangsmatrix P , wenn er Gleichung 4.1.2 erfüllt. Mittels Gleichung 4.1.2 wollen wir nun zeigen, dass der in Gleichung 4.1.1 vorgestellte Vektor der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Übergangsmatrix P_T ist. Folgendes ist bekannt:

$$\begin{aligned} P_T(x,y) &= G_T(x,y)A_T(x,y) \\ G_T(x,y) &= \frac{1}{|U(x)|} = \frac{1}{|U(y)|} = G_T(y,x) \end{aligned}$$

Wir wollen nachweisen, dass

$$\begin{aligned} (w_T)_x P_T(x,y) &= (w_T)_y P_T(y,x) \\ \iff (w_T)_x G_T(x,y) A_T(x,y) &= (w_T)_y G_T(y,x) A_T(y,x) \\ \iff (w_T)_x G_T(x,y) A_T(x,y) &= (w_T)_y G_T(x,y) A_T(y,x) . \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass

$$(w_T)_x A_T(x,y) = (w_T)_y A_T(y,x) .$$

Wir definieren für reelle Zahlen z , $[z]^+ := \max \{z, 0\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} (w_T)_x A_T(x,y) &= \frac{1}{N_T} e^{-\frac{f(x)}{T}} e^{-\frac{[f(y)-f(x)]^+}{T}} \\ &= \frac{1}{N_T} e^{-\frac{f(y)}{T}} e^{-\frac{f(x)-f(y)+[f(y)-f(x)]^+}{T}} \\ &= \frac{1}{N_T} e^{-\frac{f(y)}{T}} e^{-\frac{[f(x)-f(y)]^+}{T}} \\ &= (w_T)_y A_T(y,x) . \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Bemerkung (zu den Term aus 4.1.5)

$$e^{-\frac{f(x)-f(y)+[f(y)-f(x)]^+}{T}} = \begin{cases} e^{-\frac{f(x)-f(y)}{T}} & \text{falls } f(y) \leq f(x) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = e^{-\frac{[f(x)-f(y)]^+}{T}}$$

Damit haben wir das gewünschte Ergebnis, dass w_T der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Übergangsmatrix P_T ist. Bei fixierter Temperatur T ist die Wahrscheinlichkeit, nach langer Zeit in Lösung x zu landen, proportional zu $e^{-\frac{f(x)}{T}}$. Sei f_{\min}

der minimale Wert der Kostenfunktion f . Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow 0} (w_T)_x &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{N_T} e^{-\frac{f(x)}{T}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{f(x)}{T}}}{\sum_{y \in F} e^{-\frac{f(y)}{T}}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{f(x)}{T}}}{\sum_{y \in F} e^{-\frac{f(y)}{T}}} \frac{e^{\frac{f_{\min}}{T}}}{e^{\frac{f_{\min}}{T}}} \right) \\
 &= \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{f(x)-f_{\min}}{T}}}{\sum_{y \in F} e^{-\frac{f(y)-f_{\min}}{T}}} \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x) \neq f_{\min} \\ \frac{1}{\text{Anz. der globalen Minima}} & \text{falls } f(x) = f_{\min} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Und somit konvergiert P_t gegen die uniforme Verteilung der globalen Minima. Der Theorie nach, landen wir nach hinreichend langer Zeit und $T \rightarrow 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1, in einem globalen Minima. In der Praxis stellen sich aber gerade diese Grenzwerte als Probleme heraus, so dass am Rechner nicht notwendigerweise ein globales Minimum gefunden wird. Das Verfahren wird in vielen Fällen dazu verwendet, um erste, "gute" Näherungslösungen zu finden.

4.2 Analyse spezieller Graphen*

In Abschnitt 3.2 wurden bereits mittlere Erstankunftszeiten spezieller Graphen untersucht. Im Folgenden werden eigene Herleitungen bezüglich der mittleren Erstankunftszeit, mittleren Rückkehrzeit und der Pendelzeit vorgestellt.

4.2.1 Vollständiger Graph K_n

Der vollständige Graph K_n bestehe aus der Knotenmenge $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und der Kantenmenge E ($|E| = m$).

- Die mittlere Erstrückkehrzeit r_i lässt sich leicht mittels Theorem 6 berechnen, es gilt:

$$\begin{aligned}
 r_i &= \frac{1}{(w)_i} = \frac{1}{\frac{\deg(i)}{2m}} = \frac{2m}{\deg(i)} = \frac{\sum_{i \in V} \deg(i)}{n-1} = \frac{n(n-1)}{n-1} = n \quad \forall i \in V \\
 \cap r_i &= n \quad \forall i \in V
 \end{aligned}$$

- Auf Grund der Symmetrie des vollständigen Graphen, spielt es für die mittlere Erstankunftszeit m_{ij} keine Rolle welche beiden Knoten $i, j \in V$ $i \neq j$ man wählt. D.h. alle disjunkten Knotenpaare i und j besitzen die gleiche mittlere Erstankunftszeit m' . Man beachte, dass $m_{jj} := 0$. Mit Gleichung 2.1.3 erhalten wir für $i \neq j$

$$m_{ij} = m' = 1 + \sum_{y \in N(i)} p_{iy} m_{yj} = 1 + \frac{1}{n-1} \sum_{y \in N(i)} m_{yj} = 1 + \frac{n-2}{n-1} m' + \frac{1}{n-1} m_{jj}$$

$$\iff (n-1)m' = (n-1) + (n-2)m'$$

$$\iff (n-1-n+2)m' = n-1$$

$$\iff m' = n-1$$

$$\curvearrowright m_{ij} = n-1 \quad \forall i, j \in V \text{ mit } i \neq j.$$

- Nach Herleitung der mittleren Erstankunftszeit ist die unmittelbare Schlussfolgerung für die Pendelzeit:

$$k_{ij} = m_{ij} + m_{ji} = 2m' = 2(n-1)$$

$$\curvearrowright k_{ij} = 2(n-1) \quad \forall i, j \in V \text{ mit } i \neq j$$

4.2.2 Der Kreis C_n

Der Kreis C_n bestehe aus der Knotenmenge $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und der Kantenmenge E ($|E| = m = n$).

- Wir nutzen wiederum Theorem 6 zur Berechnung von r_i , es gilt:

$$r_i = \frac{1}{(w)_i} = \frac{1}{\frac{\deg(i)}{2m}} = \frac{2m}{\deg(i)} = \frac{2n}{2} = n \quad \forall i \in V$$

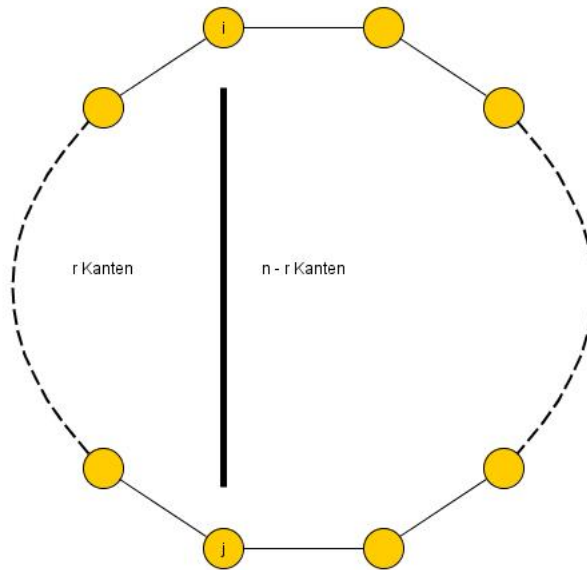
$$\curvearrowright r_i = n \quad \forall i \in V$$

- Um die mittlere Erstankunftszeit zu berechnen, sei folgendes vorangestellt (beachte Symmetrie des Kreises und Gleichung 2.4.3):

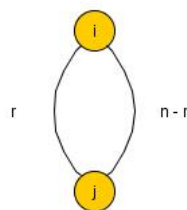
$$k_{ij} = m_{ij} + m_{ji} = 2m_{ij} = 2mR_{ij}^{eff}$$

$$\iff m_{ij} = nR_{ij}^{eff} \quad i \neq j$$

Um m_{ij} zu bestimmen, berechnen wir den Effektivwiderstand R_{ij}^{eff} zwischen Knoten i und j entsprechend Abschnitt 2.4. Dazu verwenden wir die aus der Elektrotechnik bekannten Reduktionen für parallel und in Reihe geschaltete Widerstände. Wir betrachten Abbildung 4.2.1.


 Abbildung 4.2.1: Der Kreis C_n

Nach Reihenreduktion erhalten wir den in Abbildung 4.2.2 dargestellten Graphen mit veränderten Widerständen.


 Abbildung 4.2.2: Reduktion des Kreises C_n

Für parallel geschaltete Widerstände gilt dann:

$$R_{ij}^{eff} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}} = \frac{(n-r)r}{n}$$

Insgesamt erhalten wir

$$m_{ij} = \frac{n(n-r)r}{n} = (n-r)r .$$

- $k_{ij} = 2(n-r)r \text{ } i \neq j$

4.2.3 Der Stern S_n

Der Stern bestehe aus der Knotenmenge $V = \{s\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$ siehe Abbildung 4.2.3.

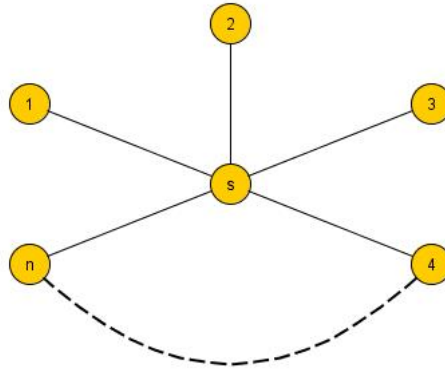


Abbildung 4.2.3: Der Stern S_n

- $r_i = \frac{1}{(w)_i} = \frac{1}{\frac{\deg(i)}{2m}} = \begin{cases} 2 & i = s \\ 2n & \text{sonst} \end{cases}$
- Wir wollen die mittlere Erstankunftszeit für unterschiedliche Blätter des Graphen berechnen. Wiederum gilt:

$$m_{ij} = nR_{ij}^{eff} \quad i \neq j; i, j \neq s$$

Wir legen die Potentiale $v(i) = 1$ und $v(j) = 0$ an. Dann gilt (siehe Gleichung 2.4.1)

$$v(z) = \frac{1}{\deg(z)} \sum_{w \in N(z)} v(w) \quad z \neq i, j$$

$$\leadsto v(z) = v(s) \quad z \in V \setminus \{i, j, s\}; \quad \leadsto v(s) = \frac{1}{n} \sum_{w \in N(s)} v(w) = \frac{1}{n}(1 + (n-2)v(s))$$

$$\dots \quad v(s) = \frac{1}{2}.$$

Auf Grund der Potentialgleichheit der Knoten aus $V \setminus \{i, j\}$, können diese bei der Berechnung des Effektivwiderstandes zu einem Knoten s' zusammengefasst werden. Wir erhalten das in Abbildung 4.2.4 dargestellte Netzwerk.

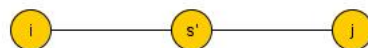


Abbildung 4.2.4: Reduktion des Sterns S_n

Und der Effektivwiderstand ergibt sich zu

$$R_{ij}^{eff} = 1 + 1 = 2 .$$

Schlussendlich ist

$$m_{ij} = 2n \quad i \neq j; i, j \neq s$$

- $k_{ij} = 4n \quad i \neq j, i, j \neq s$

4.2.4 Der Leitergraph L_n

Unter dem Leitergraphen stellen wir uns die in Abbildung 4.2.5 dargestellte, diskrete Struktur vor.

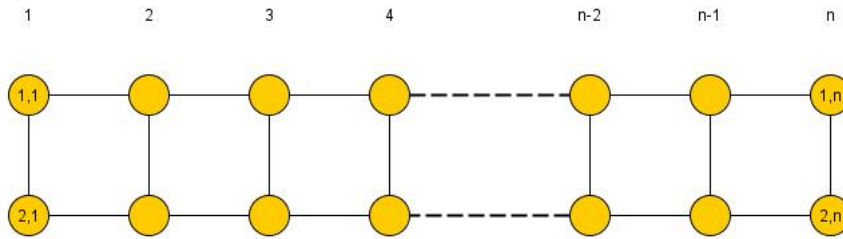


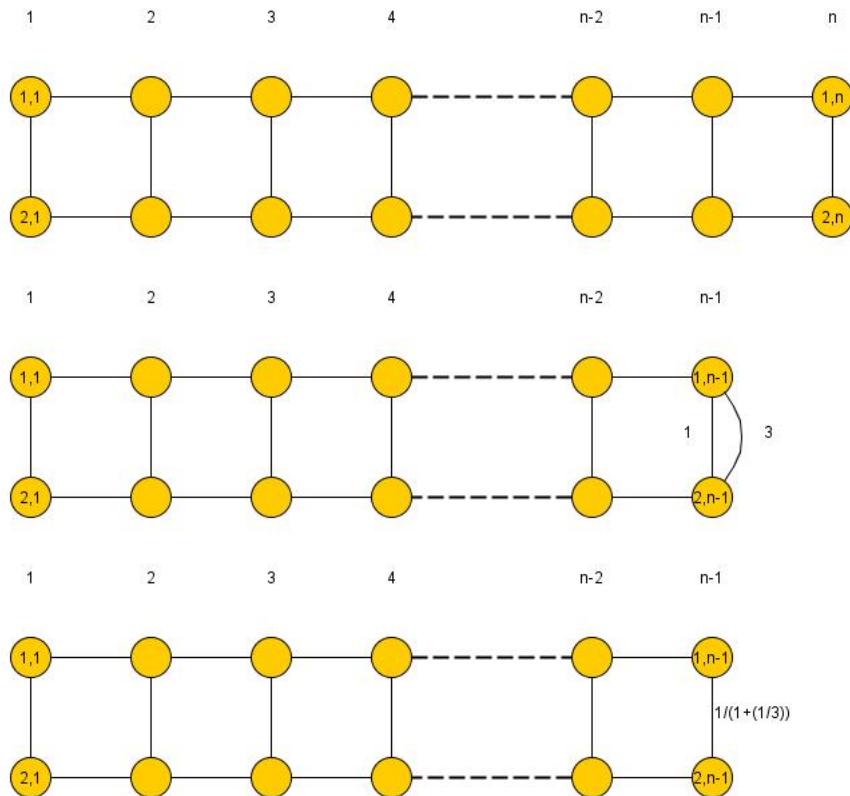
Abbildung 4.2.5: Der Leitergraph L_n

- $r_i = \frac{1}{(w)_i} = \frac{1}{\frac{\deg(i)}{2m}} = \begin{cases} 3n-2 & i \in \{(1,1) = a, (2,1) = b, (1,n), (2,n)\} \\ \frac{2}{3}(3n-2) & \text{sonst} \end{cases} \quad n \geq 2$

- Wir wollen die mittlere Erstankunftszeit m_{ab} berechnen. Dazu nutzen wir wiederum Gleichung 2.4.3, es folgt:

$$m_{ab} = (3n-2)R_{ab}^{eff}$$

Um den Effektivwiderstand zu berechnen werden folgende Reihen- und Parallelreduktionen durchgeführt (siehe Abbildung 4.2.6).

Abbildung 4.2.6: Reduktion des Leitergraphen L_n

Definieren wir mit R_k den Widerstand nach der k 'ten Reduktion $k \geq 0$ bezüglich der Kante $\{(1, n-k), (2, n-k)\}$, so gilt:

$$R_0 = 1 \text{ und}$$

$$R_{k+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+R_k}}$$

Der Effektivwiderstand ist dann $R_{ab}^{eff} = R_{n-1}$. Und wir erhalten

$$m_{ab} = (3n-2)R_{n-1} \quad n \geq 2.$$

4.3 Ausblick

Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigte sich mit den mittleren Erstankunftszeiten. Es wurden Gleichungen hergeleitet, die es uns ermöglichen, diese explizit zu berechnen. Eine Anwendung dieser umfangreichen Theorie wurde im "Simulated Annealing"-Algorithmus vorgestellt. Weiterhin werden zufällige Irrfahrten auf diskreten Strukturen beispielsweise im "pagerank"-Algorithmus verwendet. "Google" nutzt diesen Algorithmus um die entsprechenden Suchergebnisse auszugeben, dabei wird eine zufällige Irrfahrt

auf dem Graphen des “world wide web“ durchgeführt. Resultate aus dem Gebiet der Überdeckungszeit von Graphen finden Anwendung bei der Analyse des “Zusammenhangs“ von Graphen. Ein weiterer interessanter Kennwert bezüglich zufälliger Irrfahrten auf Graphen, ist die sogenannte “mixing time“. Diese gibt an, wie schnell P_t gegen die entsprechende Verteilung von w konvergiert (wobei w der eindeutige, fixe, positive Wahrscheinlichkeitsvektor der Übergangsmatrix P ist). Anwendung findet diese Größe zum Beispiel bei der Entscheidung, wie lang ein Kartendeck im Mittel gemischt werden muss, damit die Karten “vollständig randomisiert“ sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Beichelt Frank : Stochastische Prozesse für Ingenieure, Teubner, 1997
- [2] Grinstead and Snell: Introduction to probability, AMS; 2nd Ed., 1997
- [3] Levin David A. ; Peres Yuval ; Wilmer Elizabeth L. : Markov Chains and Mixing Times, University of Oregon, Juni 2007
- [4] Abdullah Mohammed: The Cover Time of Random Walks on Graphs, King's College London, September 2011
- [5] Lovasz Laszlo: Random Walks on Graphs: A Survey, 1993
- [6] Min Chen: Mixing time of random walks on graphs, Mathematics Department, University of York, August 2004
- [7] Kriesell Matthias: Algebraische Graphentheorie, Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, Juli 2008
- [8] Lovasz Laszlo: Eigenvalues of graphs, November 2007
- [9] Doyle Peter G.; Snell J. Laurie: Random walks and electric networks, Version 3.02, 5 January 2000
- [10] Tetali Prasad: Random Walks and the Effective Resistance of Networks. Journal of Theoretical Probability, Vol. 4, No.1, 1991
- [11] Hopcroft John: Lecture 16 and 17: Random Walks, CS 4850, Mathematical Foundations, März 2010
- [12] Benjamin Doerr, Skript: Mathematik für Informatiker 2, Universität des Saarlandes, SS2010
- [13] Duyzend Michael H.; Ferrell Rebecca L.; Fix Miranda J.: Cover Times of Random Walks on Finite Graphs, Department of Mathematics, Carleton College, Juni 2008
- [14] Blom Gunnar; Holst Lars; Sandell Dennis: Problems and Snapshots from the World of Probability, Springer Verlag, 1991
- [15] Tittmann Peter, Vorlesung: Lineare Algebra, Hochschule Mittweida, 2010.

- [16] <http://jumpoverfences.files.wordpress.com/2010/07/paper.pdf> , 2012
- [17] Sbihi Amine M.: Covering Times for Random Walks on Graphs, McGill University, Department of Mathematics and Statistics, März 1990
- [18] <http://www.thi.informatik.uni-frankfurt.de/Effiziente10/kapitel3h.pdf> , 2012
- [19] Schnitger Georg: Vorlesung: Effiziente Algorithmen, April 2010

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Herr Martin Richter

Mittweida, 11. Oktober 2012